光华微观真题解析 2013-2020

(Actively in progress)

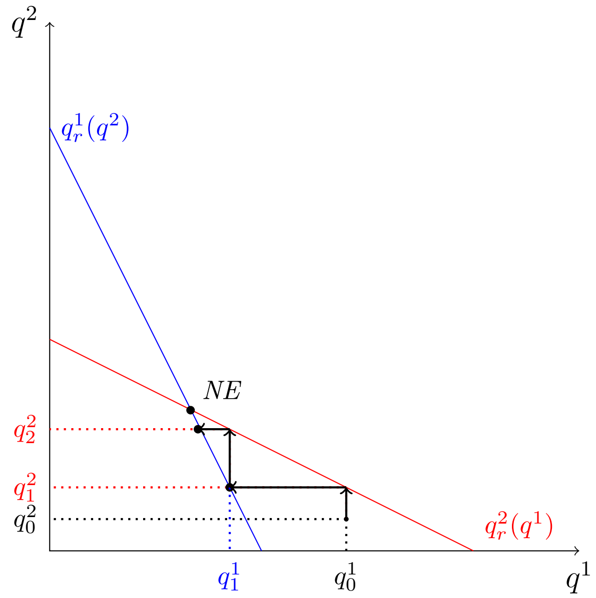
短序

做这份真题解析的初衷是我们在考研的时候或多或少受过他人的帮助，因此，我们也希望竭尽所能，回馈大家。我们非常欢迎大家对本解题手册提出意见，也非常欢迎大家把不明白的地方反馈给我们。总而言之，非常欢迎大家发邮件和我们讨论概念、解题方法、直觉、动机 (motivation) 等。

本解析分为三个部分：第一部分是真题；第二部分是解析；第三部分是我们对这 8 年真题所涉及到的知识点进行的总结。

这份解析只是初稿，肯定存在各种各样的错误，希望读者朋友们为我们提出意见；在第三部分我们提供了一些习题，我们为这些习题提供了解答。对于本手册的建议、错误报告、索取第三部分习题解答，可以联系邮箱：wenjyun.zheng@gmail.com。

最后：希望我们都能达到自己的纳什均衡:



© 微观小分队

目录

Part I

真题

Chapter 1

2013 年卷

小试牛刀. 一个消费者消费食用油 (X_1) 和大米 (X_2)，一单位食用油价格是 2 元加 1 单位粮票。一单位大米价格是 1 元加 1 单位粮票。此人拥有 60 元钱和 30 张粮票。效用函数 $U(X_1, X_2) = X_1X_2 + 10X_2$。

(i) 当货币和粮票不能互换的情况下，画出可能的 X_1 和 X_2 消费集。求出最优消费量。

(ii) 假若存在黑市交易，该消费者可以以一元钱买入或者卖出一单位粮票，在图上画出可能消费集合。求出 X_1，X_2 最优消费量，请问该消费者会购买或者卖出多少粮票?

小试牛刀. 两个居民生活在同一社区。房屋的价值都是 W 万元。每个人房子发生火灾的概率是 P，并且相互独立，损失是 L 万元。有下述两种情况:

- A : 两个人独立承担风险;
- B : 二人签一份风险共担协议，发生火灾后，会收到来自另一人的 $0.5L$ 的补偿。

(i) 给出每种情况下每个人房屋财产的价值及对应的概率，并求出在 A、B 两种情况下的房屋期望值。

(ii) 如果二人是风险中性的话，证明上述两个方案对于这两个人来说没有差异。

(iii) 如果二人是风险厌恶的话，证明风险共担方案会更受偏好。

小试牛刀. 有一个小贩在香山山道上出售一种只有他能编织的工艺品。周围有一定的群众在围观。这个小贩没有固定成本，但编织一个工艺品的成本是 5。他们的反需求函数是:

- ► $p(x_1) = 60 - 4x_1$
- ► $p(x_2) = 40 - \frac{2}{3}x_2$

(i) 求小贩的最优定价。

(ii) 假设小贩实行“量大从优”的政策。即设定一个购买量 x，当购买量大于 x 的时候价格是 p_2，购买量小于 x 的时候，价格是 p_1，$p_2 < p_1$。求这个购买限制量 x 和两个价格 p。

小试牛刀. 王刚和李红作为一个小组完成作业。该作业通过与否是按照小组来评判的。通过对二人的效用都是 3，没通过的效用是 0。二人可以选不努力 (N)，低努力 (L)，和高努力 (H)。对于李红，三种努力的成本分别是 $0, 1, 2$；对于王刚，三种努力的成本分别是 $0, 2, 4$。只有当至少一个人选择 H 或者两人都选择 L 时，小组才能顺利通过。

(i) 写出所有博弈策略矩阵，并找出所有纳什均衡。

(ii) 如果李红可以观察王刚的策略后再选择自己的，写出子博弈精炼纳什均衡。

(iii) 如果王刚可以先观察李红的策略，再选择自己的策略，求子博弈精炼纳什均衡。

(iv) 王刚会更偏好哪一个策略?

小试牛刀. 在肯德基附近开设电影院能够给肯德基带来一定收益，如果北京电影院线数量是 X，肯德基店面数量是 Y，电影院对肯德基有正外部性，则电影院的利润函数是 $48X - X^2$，肯德基的利润函数是 $60Y - Y^2 + XY$。

(i) 求二者独立决策时最优的 X 和 Y，并计算利润。

(ii) 如果肯德基收购了电影院并对 X、Y 进行决策，求出最优电影院线数量及肯德基店面数，并计算利润。

(iii) 如果仍然单独决策，但是肯德基承诺，每开一家电影院，它会提供 S 万元。请计算电影院线数量和肯德基店面数。

Chapter 2

2014 年卷

小试牛刀. 一个淘金者挖到了价值 W 的金子，他考虑将这些金子从金矿运到城市中花掉，他的一个好朋友答应帮他免费运输，但是这些金子在运输途中有 p 的概率被偷，$1-p$ 的概率可以安全到达。假定该淘金者是风险厌恶者，给定其初始财富 W，效用函数 $U(W)$，请考虑以下两种运输方案：

- 一次性运输;
- 每次运输一半。

(i) 写出上述方案中各种可能发生的情况以及对应的概率和财富值。

(ii) 淘金者会选哪种方案？给出严格证明。

小试牛刀. 一个垄断厂商所面临的需求为 $q=\frac{144}{p^2}$，成本函数为 $c(q)=q^{\frac{3}{2}}+5$。

(i) 该垄断厂商的利润最大化时的价格、产量、利润。

(ii) 假如政府进行价格管制，规定该产品价格不得高于每单位 4 元，则垄断厂商的产量是多少？利润是多少?

(iii) 如政府制定最高限价目标使垄断厂商在尽可能高的产量上进行生产，则最高限价为何种水平?

小试牛刀. 某个村子有 n 位村民和一笔财富 w，这笔财富在 k 位村民中平均分配 $(k \leq n)$，分到钱的村民 i 可以自己决定用多少钱来修路 (h_i)，多少钱用来私人消费 (X_i)，每个村民的效用函数为 $U(H, X_i) = \sqrt{HX_i}$。此外，假设公路和私人消费的单价均为 1。

(i) 均衡下，H 为多少?

(ii) H 和 k 的关系是什么？为什么?

小试牛刀. 假设在某地的手机市场上，苹果手机和小米手机进行价格竞争，设小米手机的质量为 $s_1 = 1$，苹果手机的质量为 $s_2 = 2$，生产小米手机和苹果手机的边际成本都是 2。消费者的效用为：$u(s,p) = \theta s - p$，令 p_1 为小米手机，p_2 为苹果手机的价格，并且 $\theta \sim U[4,11]$。

(i) $p_1 = 3, p_2 = 10$ 时，$\theta = 4$ 的消费者会选择哪个手机？求出无差异消费者。

(ii) 给定任意 (p_1, p_2)，找出这组价格下，无差异购买小米和苹果手机的消费者，并求出该消费者对苹果和小米手机的需求。

(iii) 如果苹果和小米手机同时决定价格，求出纳什均衡以及均衡时各自的利润。

小试牛刀. 某海湾盛产一种龙虾，附近有一个村子以捕龙虾为生。经营一艘捕虾船每个月花费 200，若有 x 艘捕虾船，则捕虾船的总收入为 $f(x) = 1000(10.2x - x^2)$。

(i) 请计算最大化捕捉龙虾的总利润的船只数，此时最大化利润时多少?

(ii) 实际情况下，每个村民都有捕虾的权利，因此没有人可以限制别人的进入，此时会有多少艘捕虾船进入? 利润水平又是如何?

(iii) 该村委会决定发放捕虾许可证，提供许可证的成本为 0，每张许可证只允许一艘船使用。该村委会的目标是最大化从发放许可证中获得的利润。请问该村委会对发放每一张许可证收费多少? 村委会的利润时多少?

(iv) 请问从经济直觉上说明为什么 (ii) 问中的解时无效率的，而 (iii) 问可以解决这种无效率问题?

Chapter 3

2015 年卷

小试牛刀. 一个人有 250000 元的资产，他从中拿出 200000 元用来买车，车出事故的概率为 5%，出事故后，车子的价值降为 40000 元。已知这个人的效用函数是：$u(W) = \sqrt{W}$。

(i) 你认为这个人是风险爱好、风险中性还是风险厌恶，并说明原因。

(ii) 求补偿所有损失的完全保险愿意支付的最高价格，并结合数学等式与图形加以说明。

(iii) 求补偿所有损失的公平保险价格，并结合数学等式与图形加以说明。

(iv) 结合 (ii) 和 (iii)，判断保险市场是否存在交易的可能，并说明原因。

小试牛刀. 已知某产品的生产函数为 $f(x_1, x_2) = \min\{x_1^a, x_2^a\}, a > 0$, x_1, x_2 为生产要素，生产要素的价格为 $w_1 = 10, w_2 = 20, p = 50$, p 为产品价格；

(i) 求规模报酬递增、规模报酬不变、规模报酬递减情况下 a 的取值范围。

(ii) 求利润最大化时的 x_1, x_2 的要素需求函数。

(iii) 求成本函数。

(iv) 前面的 (ii), (iii) 问如何依赖于 a 的取值。

小试牛刀. 有两个合伙人 1 和 2，他们共同创办了一家企业，两个人的努力程度分别为 $e_1, e_2(e_1, e_2 > 0)$，各自的努力成本函数为 $C(e_i) = \frac{e_i^2}{2}$，合伙公司的收入函数为 $R(e_1, e_2) = e_1 + e_2 + \frac{e_1 e_2}{2}$；

(i) 若两人采取合作共赢策略，此时 $\pi = R(e_1, e_2) - C(e_1) - C(e_2)$，求利润最大化时双方的努力程度 e_1, e_2。

(ii) 若两人平分收入，每个人只考虑自己的努力程度，求纯策略纳什均衡。

(iii) 在 (ii) 中，若两人提前签订契约：若公司收入大于 6，两人就平分收入；若小于 6，公司的收入捐献给慈善机构。证明在此情况下 (i) 为纯策略纳什均衡。

小试牛刀. 小李与小王博弈，小李首先开始行动，他可以选择 H 或者选择 L。小王无法观测到小李的行为，但是他可以获得信号 h 与 l，并有如下分布：

- $Pr(h|H) = p$;
- $Pr(l|H) = 1 - p$;
- $Pr(h|L) = q$;
- $Pr(l|L) = 1 - q$。

其中 $p > 0.5 > q$。在观测信号 h 与 l 上，小王可以选择 A 或者 B，支付矩阵如下：

行动组合	小李的收益	小王的收益
HA	5	2
HB	2	1
LA	6	1
LB	4	2

(i) 若 $p = 1, q = 0$，求小王的所有可能策略、收益矩阵以及纯策略纳什均衡。

(ii) 若 $p < 1, q > 0$，求小王的所有可能策略。

(iii) 若 $p = 1, q > 0$，求小王的所有可能策略。

小试牛刀. 某国际卫星电视转播公司要在北京、天津两地开设电视转播产品。已知此产品在北京的需求函数为 $q_B = 60 - 0.25p_B$，天津的需求函数为 $q_T = 100 - 0.5p_T$。项目成本为 $c(q) = 1000 + 40q$，其中 $q = q_B + q_T$。

(i) 求北京和天津分别利润最大化时的销量与定价；

(ii) 若北京、天津两地定价相同，求定价以及销量。

(iii) 以上两种情□那种情况的利润最大？以消费者剩余计算两地消费者更喜欢那种情况，并说明原因。

Chapter 4

2016 年卷

小试牛刀. 甲、乙两名消费者考虑消费两种商品：馅饼（其消费量记为 x_1）与其他商品 (其消费量记为 x_2)。两种商品价格分别为 $p_1 = 10, p_2 = 1$。甲乙二人有相同的效用函数：$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$，同时，二人的收入同为 $I = 100$ 元。甲乙二人的唯一区别在于，乙有一张馅饼的折扣券，使用该折扣券能以 50% 的价格购买任何数量的的饼（折扣券只能使用一次），甲没有折扣券。

(i) 计算两名消费者各自对于两种商品的最优消费量。

(ii) 假设在实际购买商品之前，甲和乙商量能否以一定的价格将乙的折扣券卖给甲。甲为了得到折扣券最高愿意付多少钱?

(iii) 乙为了出让折扣券至少应该得到多少钱?

(iv) 乙能否与甲达成一定的协议价格从而将手中的折扣券转让给甲?

小试牛刀. 一个垄断厂商生产两种产品,各自的市场需求函数为 $D_1(p_1,p_2)=\frac{3-p_2}{p_1^2}, D_2(p_1,p_2)=\frac{3-p_1}{p_2^2}$，厂商的成本函数为 $C(y_1,y_2)=y_1+y_2$，y_1 和 y_2 分别代表两种产品的销量。

(i) 请问两种商品为互补品还是替代品?

(ii) 请写出垄断厂商的利润（表示为 p_1 和 p_2 的函数）。

(iii) 若商品价格受到管制：政府要求 $p_2=1$，$p_1\in[0,3]$。厂商追求利润最大化目标，则 p_1 应为多少?

(iv) 若厂商能让两种商品保持相同的价格，即 $p_1=p_2=p$，求最优价格 p。

小试牛刀. 某消费者面临跨期消费选择问题。假设此消费者在今天的消费量为 c_0，在明天的消费量为 c_1，两期的价格均为 1。假设该消费者今天的收入为 $I_0 = 100$，设明天的收入为 I_1。消费者的效用函数是 $u(c_0, c_1) = ln(c_0) + ln(c_1)$，消费者可以选择储蓄，但不能向他人借款，假设利率水平为 $r = 0$，求：

(i) 若明天的收入 $I_1 = 34$，求此消费者的消费决策。

(ii) 若明天的收入存在两种可能，分别是 $I_1 = 100$ 和 $I_1 = 0$，两种可能性发生的概率各为 50%，求此消费者的消费决策。

小试牛刀. 谷歌和百度在市场进行质量竞争，谷歌的质量是 r_1，百度的质量为 r_2。质量 r_1 和 r_2 介于 0 至 5 之间。谷歌的收入函数为 $200\big[0.5+0.05(r_1-r_2)\big]$，成本函数为 $c_1=r_1^2$；百度的收入函数为 $200\big[0.5+0.05(r_2-r_1)\big]$，成本函数为 $c_2=1.25r_2^2$。试求：

(i) 若百度收购了谷歌，那么利润最大化时的质量 r_1 和 r_2 分别为多少?

(ii) 若百度和谷歌进行寡头竞争，r_1 和 r_2 分别为多少? 各自的利润分别为多少? 总的质量为多少? 和 (i) 的总质量相比如何?

(iii) 若谷歌有一个投资计划，投入 60 单位的费用进行宣传和市场推广，投资之后的市场结构会发生变化：即谷歌的收入函数变为 $200\big[0.75+0.05(r_1-r_2)\big]$，百度的收入函数变为 $200\big[0.25+0.05(r_2-r_1)\big]$，假设各自成本不变。请问谷歌会做这项投资么?

小试牛刀. 在一个完全竞争的钢铁市场，市场的需求函数为 $p_d = 20 - q$，市场的供给函数为 $p_s = 2 + q$。炼钢企业的污染边际损耗是 $MD = 0.5q$。

(i) 画出需求曲线、供给曲线、边际损耗曲线以及社会的边际成本曲线。

(ii) 如果企业不对污染采取措施，那么市场的均衡价格和产量是多少?

(iii) 请问社会最优的产量是什么？相应的污染成本为多少?

(iv) 请问污染的外部性造成的社会福利损失为多少?

(v) 政府能否通过对产量征税从而达到社会最优产量水平？如果可以，如何征$\boxed{\text{F}}$?

Chapter 5

2017 年卷

小试牛刀. 考虑下面三个情形并作答：

(i) 一个消费者消费牛肉 (b) 和胡萝卜 (c)，她的效用函数为 $U(b,c)=\sqrt{bc}$，她对于两种商品的初始禀赋为 2 公斤牛肉和 3 公斤胡萝卜，她可以在市场上出售自己的禀赋。请问是否存在一组市场价格使她愿意直接消费自己的禀赋。

(ii) 一个消费者消费饮料 (b) 和薯片 (c)，他的效用函数是 $U(b,c)=\min\{b,c\}$，他对于两种商品的初始禀赋为 2 公斤薯片和 3 升饮料，他可以在市场上出售自己的禀赋。请问是否存在一组市场价格使他愿意直接消费自己的禀赋。

(iii) 护林员甲住在祁连山深处，他消费两种产品，汽油和牛肉面。由于他的住处距离最近的牛肉面馆 30 公里，去吃面要开车前往，他每天必须先消费 6 升汽油，余下的钱全部用于购买牛肉面。请问他的偏好可以用无差异曲线描述吗？如果可以，请面图。

小试牛刀. 一个农民有 10000 元资金，年初他可以用来购买水稻种子 (s) 以及保险 (i)。如果该年天气好，他可以消费水稻种植的产出，产出的大米量（公斤）为 $y=10\sqrt{s}$；如果天气不好则水稻绝收，他的消费完全来自保险公司的理赔，保险公司就每份保险赔付给他一公斤大米。天气好的概率为 $\pi=0.8$，种子价格 (p) 为每公斤 1 元，保险价格 1 为 2 元一份。

(i) 假设农民的效用函数为 $U=\pi ln(C_1)+(1-\pi)ln(C_2)$，$C_1$ 和 C_2 分别是天气好和天气不好时的大米消费量。请问他会买多少公斤种子，多少份保险?

(ii) 假设农民的效用函数为 $U=\min\{ln(C_1),ln(C_2)\}$，请问他会买多少公斤种子?

小试牛刀. 假设城市 W 由两座电厂 (A 和 B) 提供电力。A 和 B 均是热力电厂，燃烧煤炭供电的同时会排放空气污染物。为改善空气质量，W 市决定要求 A 和 B 电厂减排。A 电厂减少排放 x_A 万吨污染物的总成本为 $C_A(x_A) = 3x_A^2$。B 电厂减少排放 x_B 万吨污染物的总成本为 $C_B(x_B) = 5x_B^2 + 10x_B$。$W$ 市政府聘请了环保专家评估减少污染物排放将会给 W 市带来的收益。经测算，如果 A 和 B 分别减排 x_A 和 x_B 万吨，W 市获得的总收益为: $120(x_A + x_B)$。请依据以上信息回答下列问题:

(i) 请计算 A 和 B 的社会最优减排量。

(ii) W 市政府希望通过征收“排污税”降低 A 和 B 的污染物排放量:

  (a) 请问 W 市政府需对每吨污染物征收多少“排污税”才能使 A 和 B 分别达到第 (i) 问中的减排量?

  (b) 请问 W 市征收如上“排污税”的情形下，请用等式列出 A 和 B 电厂各自决定减排量所面对的优化问题。并证明 A 和 B 各自选择的最优减排量与第 (i) 题中的社会最优减排量相同。

(iii) 假设 W 市政府决定停止征收“排污税”，并出台相关规定强制要求电厂减少污染物排放量。有建议称 W 市政府要求 A 和 B 电厂每年分别减排 1 万吨污染物。请通过数学推导与文字说明论证这个建议并不是最有效率的。

小试牛刀. 公司 1 和公司 2 生产相同的产品，而且成本为 0。两个公司同时选择生产数量，分别满足 $q_1 \geq 0$ 和 $q_2 \geq 0$。与之相对应的需求函数是 $p(q) = 12 - q$，其中 $q = q_1 + q_2$。

(i) 找到本博弈的纳什均衡 (q_1, q_2)，以及纳什均衡下两个公司的利润。

(ii) 假定公司 2 被强迫生产 $q_2 = 0$，而公司 1 是一个垄断经营者，面对的需求函数是 $p(q) = 12 - q$ 且成本为 0。公司 1 的利润是多少?

(iii) 现在假定这个博弈过程有三个阶段。

- 公司 1 选择是否给公司 2 一笔贿赂，让公司 2 不参与市场竞争。
- 公司 2 决定是否接受公司 1 的贿赂并不参加市场竞争。
- 第三阶段有两种情况：
  (a) 如果公司 2 接受了公司 1 的贿赂，那么公司 1 就是这个市场上的垄断经营者。公司 1 的成本依然为 0，面对的需求函数是 $p(q) = 12 - q$。因此公司 1 会获得垄断者的利润，而公司 2 获得这笔贿赂。
  (b) 如果公司 2 拒绝了这笔贿赂，那么两个公司会进行第 (i) 问中所描述的生产博弈，他们的利润也如第 (i) 问中所计算。

请找到这一新规则下的子博弈完美纳什均衡。在这一子博弈完美均衡下，公司 1 和公司 2 的利润分别是多少?

(iv) 现在假定有一个新的公司 3 加入这个市场，公司 3 的产量为 $q_3 \geq 0$，单位成本为 2。与之相对应的需求函数是 $p(q) = 12 - q$，其中 $q = q_1 + q_2 + q_3$。找到本博弈的纳什均衡 (q_1, q_2, q_3)，以及纳什均衡下三个公司的利润。

(v) 现在假定这个博弈过程有三个阶段。

- 公司 1 选择是否给公司 3 一笔贿赂，让公司 3 不参与市场竞争。
- 公司 3 决定是否接受公司 1 的贿赂并不参加市场竞争。
- 第三阶段有两种情况：
  (a) 如果公司 3 接受了公司 1 的贿赂，那么公司 1 和公司 2 就继续第 (iii) 问中所描述的博弈。
  (b) 如果公司 3 拒绝了这笔贿赂，那么三个公司会进行第 (iv) 问中所描述的生产博弈，他们的利润也如 (iv) 中所计算。清找到这一新规则下的子博弈完美纳什均衡。在这一子博弈完美纳什均衡下，公司 $1, 2, 3$ 的利润分别是多少?

Chapter 6

2018 年卷

小试牛刀. 假设明天的世界有两种状态，晴天或雨天。消费者丙在明天的禀赋是确定的，等于 y_1 碗热干面。雨天时，他的禀赋 y_2 是随机的，有一半的概率为 y_H 碗，一半的概率为 y_L 碗，y_H y_L。丙的偏好是 $U = \min\{\mathbb{E}(c_1), \mathbb{E}(c_2)\}$，$c_1$ 和 c_2 代表明天在晴天和兩天两种状态下分别消费的热千面数量，$\mathbb{E}$ 是基于今天信息的数学期望。公司 C 在今天的期货市场上交易两个状态下的热干面期货，价格为 p_1 和 p_2。消费者可以选择以 p_1 的价格向公司 C 买晴天时的一碗热干面期货，即今天付出 p_1，如果明天是晴天，则公司 C 提供一碗热干面；如果明天为雨天，则公司 C 不提供。消费者也可以以 p_1 的价格向公司 C 出售晴天的一碗热干面期货，即今天消费者收到 p_1。如果明天为晴天，则消费者提供一碗热千面，如果明天为雨天，则消费者不提供。$p2$ 以此类推。消费者在今天没有任何禀赋，在明天的两种状态下，$c_1 = y_1 + x_1$, $c_2 = y_2 + x_2$。数量为正值的 x_1 和 x_2 代表今天购买的热干面期权，数量为负值的 x_1 和 x_2 代表今天出售的热干面期权。回答下列问题:

(i) 写出在今天的期货市场上的预算约束。

(ii) 求 x 的表达式。

(iii) x 一定是负的吗?

(iv) 若 p_1, p_2 均翻倍，对 x_1 有何影响?

小试牛刀. 考虑一个有三家公司各自生产产品参加的博弈。如果每家公司 $i \in \{1, 2, 3\}$ 选择自己公司产品的价格 $p_i \in [0, \infty)$，那么这家公司的销售数量是 $1 - p_i + k \sum_{-i}^{p_j}$，边际成本 $c_i > 0$。请计算每家企业的产品价格以及所获的的利润。

小试牛刀. 有两种商品 x 和 y，小丽的效用函数为 $U(x,y) = x + y$，小贾的效用函数为 $U(x,y) = \max\{x, y\}$。

(i) 请用无差异曲线在埃奇沃斯盒中表示两个人的偏好。

(ii) 请猜想 x, y 和均衡的价格有什么关系。

(iii) 在均衡的情况下，分配的结果会是什么样?

小试牛刀. 某市正规划新建一个音乐会场地。假设城市中有两个居民：小丽 (L) 和小贾 ()J。居民的个人捐赠将成为建造该场地经费的唯一来源。假设两位居民对于私有品 (X_i) 和场地总尺寸 (S) 的效用函数为 $U(X_i, S) = 0.5ln(X_i) + 0.5ln(S)$，场地总尺寸即为其总座位数 S，等于由小丽和小贾各自捐赠的座位数之和，即：$S = S_L\ S_J$。小丽的收入为 200，小贾的收入为 100。假设私有品和座位数的单价都为 1。

(i) 如果政府不干预的话，该场地将会建造多少座位？其中多少是由小丽捐赠的，多少是由小贾捐赠的呢?

(ii) 总座椅数的社会最优解是多少？如果你的答案与 (i) 不同，请解释原因。

(iii) 现在，假设一个座位的价格由 1 变为 p_s，而私有品的价格仍为 1，在价格改变的同时，小丽和小贾的收入按照如下方式相应改变：当价格变为 p_s 时，小丽和小贾的预算约束增加了 C_L 和 C_J，其中 $C_L = (p_s - 1)S_L, C_J = (p_s - 1)S_J$。增加后的预算约束称为补偿预算约束。写下小丽和小贾的补偿预算约束的表达式。你觉得它们为什么被称 “补偿的”?

(iv) 通过需求曲线的纵向加总，求出社会最优解。

(v) 按如下方式推导 S 的逆需求曲线：

- 在满足补偿预算约束的前提下，最大化小丽和小贾的需求曲线。注意，在求导之前，不要带入 C_L 和 C_J 的表达式。
- 对于小丽和小贾，求解 S_L 和 S_J，作为 p_s 的自变量的函数形式。

请使用你在 (i) 中得到的结果推导社会需求曲线。

(vi) 回到 $p_s = 1$，$p_X = 1$ 的初始设定。请通过使社会需求曲线与社会供给曲线（即场地座位的边际成本）相等，找到座椅数的社会均衡数量。和 (ii) 结果相比，是否不同?

Chapter 7

2019 年卷

小试牛刀. 梅梅甜品店自制中秋节月饼，月饼有两种：五仁月饼 (x_1) 和鲜肉月饼 (x_2)。她观察到消费者对两种盒装的月饼支付意愿相等：

- 一种是 4 个五仁月饼加 2 个鲜肉月饼；
- 另一种是 2 个五仁月饼加 4 个鲜肉月饼。

假设消费者的效用函数为 $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a} (0 < a < 1)$。请问如果改变营销策略，只卖一种种类的月饼：5 个五仁月饼一盒，加送 1 个鲜肉月饼：或者 5 个鲜肉月饼一盒，加送 1 个五仁月饼，消费者对新营销策略中一盒 5 个月饼的支付意愿是否会提高？

小试牛刀. 假设一个人生活在没有集体供暖的地区，他为冬季内取暖所愿付付出的最高价格为 w 元。他可以购买毛毯 (x_1) 御寒，也可以烧煤 (x_2) 取暖。他从毛毯和烧煤中获得的热量为 x_1x_2，毛毯价格为 p_1/条，取暖煤炭价格为 p_2/吨。因治理环境，政府杜绝煤炭使用，天然气 (x_3) 对环境污染比煤炭小，燃烧效率高，但价格 p_3 比较高。用天然气和毛毯取暖获得的热量为 $x_1x_3^2$。

(i) 政府$\boxed{\text{F}}$定补贴天然气的价格，每吨补贴 t 元，使得补贴之后，这个人可以保持原来的取暖预算并获得同样的取暖效果，求补贴额 t 应该为多少元/吨?

(ii) 如政府考虑不单独补贴天然气，而是发给这个人一笔额外的取暖补贴 T，可自己选择买毛毯或买天然气或两个都买，都保特同样的取暖效果，取暖补贴 T 应为多少?

小试牛刀. 一个人在当期 T_0 持有一笔现金 x_0，考虑投资。每一期现金对此人当期的效用函数为 x^a。当前市场无风险利率为 r，有一个投资项目，有 p 的概率会在下一期工带来现金 $x_1(x_1 > x_0)$ 或者 $1-p$ 的概率在下一期 T_2，带来现金 $x_2(x_2 > x_0)$。已知此人是风险中性，且存在概率 p 使得投资与不投资对此人无差异。

(i) 求 p;

(ii) 假设有第二个人，每一期现金对第二个人的效用函数为 x^2，他与第一问中的人一样面对同样的投资机会与市场无风险利率。如此时的 p 刚好是你上问求出的值，则第二个人是否会选择投资此项目呢？解释。

小试牛刀. 假设有 A 和 B 两座城市劳动人口均为 L, 其产出分别为 $y_A = aLh_a$ 和 $y_B = bLh_b$, 其中 a 为 A 城市的技术效率，h_a 为 A 城市劳动力的人均教育水平。B 城市的变量含义依次类推。每座城市的政府可以通过投入来改变教育水平，A 城市把 L 名劳动力教育到 ha 水平的总成本为 $cL(ha)^2$，其中 c 为成本参数，B 城市的相应成本为 $cL(bb)^2$。

(i) A 城市的政府选择教育水 h_a 最大化当地的净产出 $aLh_a - cL(h_a)^2$，B 城市的政府选择教育水平 h_b 来最大化当地的净产出 $bLh_b - cL(h_b)^2$，求两座城市的最优教育水平。

(ii) 假设因为 A 城市的技术效率高于 B 城市，即 $a > b$，因此有 m 名 B 城市的劳工在受到教育后移到 A 城市。注意其教育程度 (h_b) 在迁移后不变，假设 B 城市在决定教育投入时预见了这一迁移行为，但无法向迁移的劳工收回教育成本。迁移后两地的产出分别为 $a(Lh_a + mh_b)$ 和 $b(Lh_b - mh_b)$，求两地的最优教育水平。和 (i) 相比，允许迁移后的最优教育水平有何变化?

(iii) 假设中央政府介入教育，承担了教育成本，通过选择 h_a 和 h_b 来最大化两地的总净产出 $a(Lh_a + mh_b) + b(Lh_b - mh_b) - cL(ha)^2 - cL(h_b)^2$，求两地的最优教育水平。和 (i) 相比，此种情况下的最优教育水平有何变化?

小试牛刀. 村里有 $2N$ 个居民，其中 N 个居民住在一区，每人养 q_1 只羊，每只羊成本为 c_1，N 个居民住在二区，每个人养 q_2 只羊，每只羊成本为 c_2。每只羊带来的收入是 $200-q$，q 是村里羊的总数。

(i) 找到博弈的纳什均衡下两个区域里每个居民养羊的数量，找出社会效益最优选择下村子里羊的总量。

(ii) 当地政府为了达到社会效益的最优选择，对两个地区按照统一标准征税，每只羊征收 t。计算税收标准 t，以及对应的纳什均衡下两个区域里每个居民的养羊数量。

(iii) 如果当地政府只对第一区的居民征税，每只羊征税 t，以达到社会效益的最优。请计算税收标准 t，以及对应的纳什均衡下两个区域里每个居民养羊的数量。

Chapter 8

2020 年卷

小试牛刀. B 城的市民有两种出行方式：公共交通和私家车。为鼓励绿色出行，B 城补贴市民的公共交通花销，其补贴力度为原价格的 50%。即本需要花费 p 元/公里的线路在补贴后只需要花费 $0.5p_1$ 元/公里即可。假设 B 城的市民平均每月出行的公共交通通勤里程为 x_1 公里，私家车里程为 x_2 公里。私家车出行的成本为 p_2 元/公里。市民从出行中获得的效用为 $U(x_1, x_2) = x_1^{0.2}x_2^{0.8}$，现有专家提出，为缓解高峰时段公共交通运力不足，建议取消公共交通价格补贴，使得价格恢复为 p_1 元/公里。但这样会使市民的出行效用降低，所以建议每月给每一位市民一笔固定的收入补贴 s 元。政府的目标是花最少的钱使市民的效用在补贴前后无差异。

(i) 为了使得市民的效用水平在补贴方式改变前后没有差异，s 最少应为多少?

(ii) 改为固定收入补贴之后市民选择的出行方式 x_1 和 x_2 为多少?

(iii) 哪一种补贴方式对政府的财政负担较小，价格补贴还是固定收入补贴? 差异为多少元?

小试牛刀. 一个小商贩在小车上售卖两种商品，冰激凌和汽水。他认为未来周高温和气温正常的概率相等。此小商贩对收入的效用为 $U(w) = \sqrt{w}$。如果他全部售卖冰激凌，则如果未来一周发生高温，收入为 2500 元；如果气温正常，收入为 400 元。如果他全部售卖汽水，则如果未来一周发生高温，收入为 1600 元；如果气温正常，收入为 900 元。

(i) 该小贩应怎样组合冰激凌和汽水的售卖比例 α 和 $1-\alpha$，使得期望效用最大?

(ii) 有一个保险给只卖冰激凌的商贩设立。保险的保费为每周 400 元。如果气温不高（即气温正常)，则保费赔付 800 元。这个小商贩是否应该购买此保险并只售卖冰激凌，还是应该不买保险保持 (i) 中两种商品的售卖比例?

小试牛刀. 某市由两家企业 A, B 生产同样的产品，其生产函数分别为：$y_a = 2\sqrt{L_a}$ 和 $y_b = \sqrt{L_b}$，其中 L_a 为企业 A 雇佣的工人数量，y_b 以此类推。给定外生的产品价格 $p = 30$ 和外生的工资 $w = 5$，两家企业分别最大化其利润。企业的生产过程产生污染，A 和 B 企业的排污量分别为 $v_a = y_a^2, v_b = y_b^2$。A 市居民的效用函数为 $8\sqrt{L_a + L_b} - v_a - v_b$。

(i) 求使该市居民效用最大化的排污水平 v_a 和 v_b。

(ii) 如果企业 A 和 B 无视污染给居民带来的负效用，它们的总排污量是多少?

(iii) 如果政府直接规定 A 和 B 两个企业的总排污量，使其等于 (i) 中的总排污水平，如何分配排污量才能最大化就业?

(iv) 如果政府收取排污费，费用为每单位污染收费 t，请问能否通过设定 t 复制 (iii) 问中的排污量分配? 如果能，请给出 t 的表达式。

小试牛刀. 考虑以下完全信息动态博弈。博弈的参与者为一个垄断性的上游企业 U 与一个垄断性的下游企业 D。在博弈的第一阶段，企业 U 以单位价格 p_u 向企业 D 销售中间产品。在第二阶段，企业 D 把中间产品（一比一地）加工为最终产品，并以单位价格 p_d 向消费者出售。假设企业 U 的生产成本为零，而企业 D 除购买中间产品的费用外亦无其它生产成本。最后，假设企业 D 面对的需求函数为 $q(p_d) = 1 - p_d$。

(i) 考虑博弈的第二阶段。给定上游企业的中间产品供给价格 p_u，请求出下游企业关于最终产品的利润最大化定价。

(ii) 回到博弈的第一阶段。给定下游企业的利润最大化定价策略，请求出上游企业的利润最大化定价（即子博弈精炼纳什均衡定价)。

(iii) 在均衡时，产生利润 (即两个企业利润的加总) 是多少？有多少最终产品会销售给消费者?

(iv) 假设现在题中的上游企业 U 和 D 合并为一个企业。请求出在此新的情形下，有多少最终产品会销售给消费者。与 (iii) 中的情况对比，产业利润与消费者福利有何变化?

Part II

解析

Chapter 9

2013 年解

小试牛刀. 一个消费者消费食用油 (X_1) 和大米 (X_2)，一单位食用油价格是 2 元加 1 单位粮票。一单位大米价格是 1 元加 1 单位粮票。此人拥有 60 元钱和 30 张粮票。效用函数 $U(X_1, X_2) = X_1X_2 + 10X_2$。

(i) 当货币和粮票不能互换的情况下，画出可能的 X_1 和 X_2 消费集。求出最优消费量。

(ii) 假若存在黑市交易，该消费者可以以一元钱买入或者卖出一单位粮票，在图上画出可能消费集合。求出 X_1，X_2 最优消费量，请问该消费者会购买或者卖出多少粮票?

证明.

(i) 由题意可知：消费者同时面临钱和粮票的约束。写出两个约束:

$$
\begin{aligned}
\text{钱} &: 2X_1 + X_2 \leq 60 \\
\text{粮票} &: X_1 + X_2 \leq 30
\end{aligned}
$$

由图可见，橙色区域为有效约束，因此消费者的最优选择为:

$$
\begin{aligned}
\max_{X_1,X_2} \quad & X_1X_2 + 10X_2 \\
\text{s.t.} \quad & X_1 + X_2 \leq 30
\end{aligned}
$$

在最优解时，约束等式成立！(否则，消费者总可以增加 X_1 或 X_2 的消费来增加效用) 因此，该不等式约束问题转化为等式约束问题:

$$
\begin{aligned}
\max_{X_1,X_2} \quad & X_1X_2 + 10X_2 \\
\text{s.t.} \quad & X_1 + X_2 = 30
\end{aligned}
$$

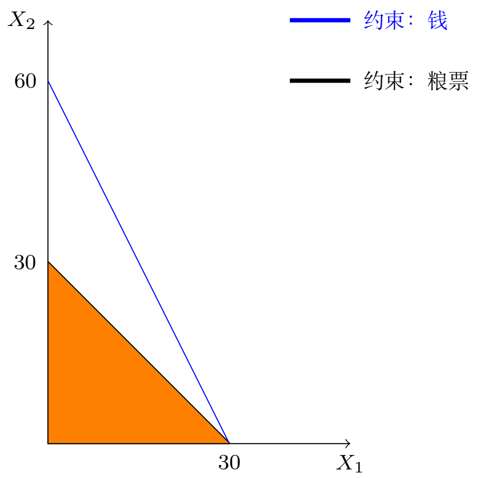


图 9.1: 消费者面临的两个约束

拉格朗日函数为: $\mathcal{L}(X_1, X_2, \lambda) = X_1X_2 + 10X_2 + \lambda(30 - X_1 - X_2)$

$$
\text{一阶条件:} \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(X_1, X_2, \lambda)}{\partial X_1} & = X_2 - \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(X_1, X_2, \lambda)}{\partial X_2} & = X_1 + 10 - \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(X_1, X_2, \lambda)}{\partial \lambda} & = 30 - X_1 - X_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_1^* = 10 \\ X_2^* = 20 \\ \lambda^* = 20 \end{cases}
$$

根据该问题的实际背景，$(X_1^*, X_2^*) = (10, 20)$ 是最优选择。

(ii) 由第一问，我们可以发现有效约束为粮票带来的约束，即粮票不够，但是钱够，所以直觉上来看，消费者会花钱购买粮票，最后消费者会购买多少张粮票呢？我们不妨假设消费者购买 λ 张粮票，此刻消费者可能的消费集合变为：

现在，我们再来思考购买了 λ 张粮票的消费者将如何做出消费者选择。消费者的消费者选择会在红色边界区域吗？显然不会，因为在这个区域消费者的钱没用光！消费者可以用剩下的钱去换一些粮票，然后继续购买 X_1 和 X_2 增加效用。同理，消费者的选择会在粉色边界区域吗？也不会，因为在这个区域消费者的粮票没用光！所以购买 λ 张粮票的消费者的最优消费为：

$$(X_1^*, X_2^*) = (30 - 2\lambda, 3\lambda)$$

那么消费者购买多少张粮票可以让其达到最大的效用？根据以上的分析，思路变得明了起来：我们只需考虑：

$$\max_{\lambda} \ U(\lambda) = X_1X_2 + 10X_2|_{(X_1,X_2)=(30-2\lambda,3\lambda)} = -6\lambda^2 + 120\lambda$$

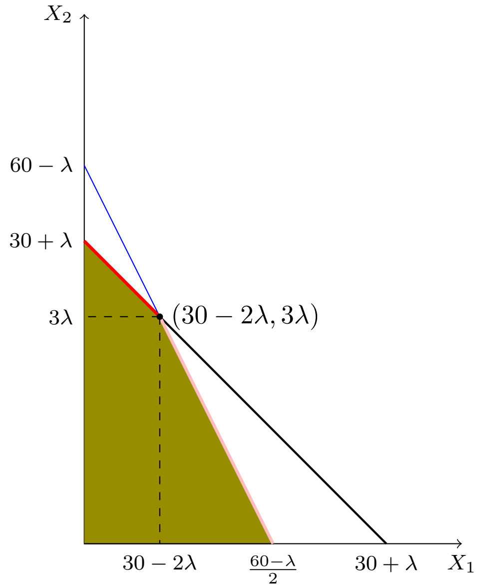


图 9.2: 购买 λ 张粮票后的消费可行集

解得: $\lambda^* = 10$, 则消费者购买 10 张粮票，此时消费的 (X_1, X_2) 为 $(10, 30)$。

$\square$

小试牛刀. 两个居民生活在同一社区。房屋的价值都是 W 万元。每个人房子发生火灾的概率是 P，并且相互独立，损失是 L 万元。有下述两种情况:

- A : 两个人独立承担风险;
- B : 二人签一份风险共担协议，发生火灾后，会收到来自另一人的 $0.5L$ 的补偿。

(1) 给出每种情况下每个人房屋财产的价值及对应的概率，并求出在 A、B 两种情况下的房屋期望值。

(2) 如果二人是风险中性的话，证明上述两个方案对于这两个人来说没有差异。

(3) 如果二人是风险厌恶的话，证明风险共担方案会更受偏好。

证明.

(i) 由于两位居民是对称的，因此我们仅写出第一位居民在两种情况下的房屋财产价值及对应的概率。

价值	W	$W-L$
概率	$1-P$	P

表 9.1: 第一种情况下，第一位居民的房屋财产价值分布

价值	W	$W-\frac{L}{2}$	$W-L$
概率	$(1-P)^2$	$2P(1-P)$	P^2

表 9.2: 第二种情况下，第一位居民的房屋财产价值分布

因此，不难算出，两种情况下，第一位居民的房屋财产的期望价值为:

$$\mathbb{E}(A) = W(1-P) + (W-L)P = W - PL;$$
$$\mathbb{E}(B) = W(1-P)^2 + (W-\frac{L}{2})2P(1-P) + (W-L)P^2 = W - PL$$

(ii) 由于该居民风险中性，因此根据定义: 对任何不确定性事件 x，该等式对居民成立: $U(\mathbb{E}(x)) = \mathbb{E}U(x)$. 根据第一问: $\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}(B)$，因此 $\mathbb{E}U(A) = \mathbb{E}U(B)$.

(iii) 设该风险厌恶居民的冯诺依曼效用函数为 $u(\cdot)$，则两种情况下居民的期望效用为:

$$\mathbb{E}U(A) = u(W)(1-P) + u(W-L)P$$
$$\mathbb{E}U(B) = u(W)(1-P)^2 + u(W-\frac{L}{2})2P(1-P) + u(W-L)P^2$$
$$\mathbb{E}U(B) - \mathbb{E}U(A) = 2P(1-P)[u(W-\frac{L}{2}) - \frac{1}{2}u(W) - \frac{1}{2}u(W-L)]$$

由于居民风险厌恶，因此 $u(\cdot)$ 为凹函数，故:

$$u(W-\frac{L}{2}) \geq \frac{1}{2}u(W)+\frac{1}{2}u(W-L)$$

因此：$\mathbb{E}U(B) \geq \mathbb{E}U(A)$.

$\square$

评 1. 对于第三问，我们还有第二种解法。由于:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}U(A) &= u(W)(1-P)+u(W-L)P \\ \mathbb{E}U(B) &= u(W)(1-P)^2+u(W-\frac{L}{2})2P(1-P)+u(W-L)P^2\end{aligned}$$

一个直觉的想法就是把 $\mathbb{E}U(B)$ 中的 $u(W-\frac{L}{2})(2P(1-P))$ 拆开，如果我们能证明:

$$u(W-\frac{L}{2})(2P(1-P)) \geq (P-P^2)u(W)+(P-P^2)u(W-L) \tag{9.1}$$

那我们就可以证明 $\mathbb{E}U(B) \geq \mathbb{E}U(A)$. 不难发现，式子 (9.1) 等价于:

$$u(W-\frac{L}{2}) \geq \frac{u(W)+u(W-L)}{2}$$

这正是凹函数的定义。

评 2. 在第20章，我们为大家梳理了风险厌恶相关的知识点。

小试牛刀. 有一个小贩在香山山道上出售一种只有他能编织的工艺品。周围有一定的群众在围观。这个小贩没有固定成本，但编织一个工艺品的成本是 5。他们的反需求函数是:

- $p(x_1) = 60 - 4x_1$
- $p(x_2) = 40 - \frac{2}{3}x_2$

(i) 求小贩的最优定价。

(ii) 假设小贩实行"量大从优"的政策。即设定一个购买量 x，当购买量大于 x 的时候价格是 p_2，购买量小于 x 的时候，价格是 p_1，$p_2 < p_1$。求这个购买限制量 x 和两个价格 p。

证明.

(i) 刚看到这道题时，我脑子的第一想法是：分类讨论！因为题目没有明确说明是统一定价还是三级价格歧视。但是，仔细思考了一下，这时汉语的博大精深就体现出来了。请各位注意，题目中用到了围观一词，这个词的意思是：围着观看。因此，一群消费者围着观看该小贩销售工艺品，小贩无法三级价格歧视，只能统一定价！

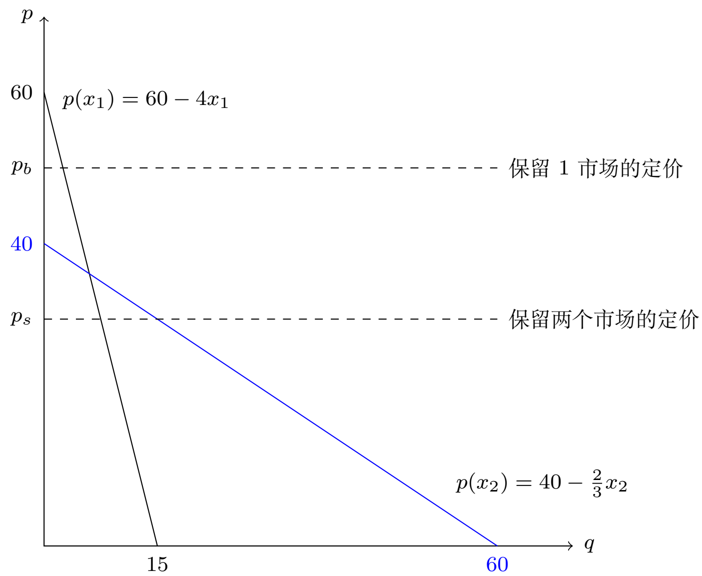


图 9.3: 围观群众的需求函数

此时小贩面临两个选择：定价 $p \in [0, 40]$，同时满足两个市场；定价 $p \in (40, 60)$，只满足市场 1。我们分类讨论。

(a) $p \in [0, 40]$ 时，小贩同时满足两个市场，因此面临问题：

$$\max_{p} \quad (p-5)(60 - \frac{3}{2}p + 15 - \frac{1}{4}p)$$
$$\text{s.t.} \quad p \in [0, 40].$$

解得：$p^* = \frac{335}{14} \approx 24 \in [0, 40]$

(b) $p \in (40, 60)$ 时，小贩只满足市场 1，因此面临问题:

$$\begin{aligned} \max_{p} \quad & (p-5)(15-\frac{1}{4}p) \\ \text{s.t.} \quad & p \in (40, 60) \end{aligned}$$

解得：$p^* = 32.5 \notin (40, 60)$，由于仅保留 1 市场时，利润函数是开口向下的二次函数且在 $p^* = 32.5$ 处取得最大值，因此若仅保留 1 市场，小贩最优定价为 $p^* = 40$，此时利润小于 $p = \frac{335}{14}$ 包括两个市场时的定价。

因此，小贩最优解为：$p^* = \frac{335}{14}$。

(ii) 一个直觉上的想法是，在完美信息的情况下（小贩可以区分两类消费者）小贩的最优定价策略为三级价格歧视。在第一问小贩无法实现三级价格歧视，那么“量大从优”的政策或许可以帮助小贩实现三级价格歧视！

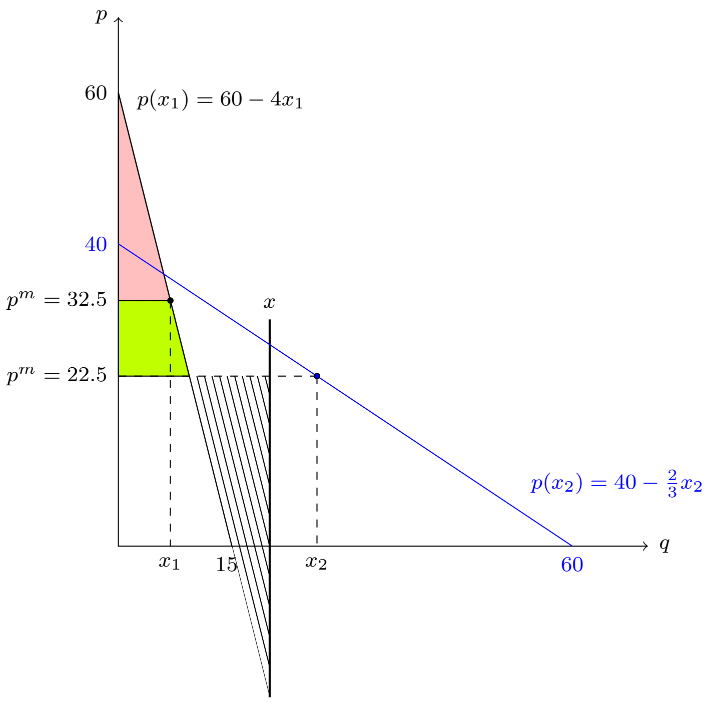


图 9.4: 垄断最优定价及消费者剩余

对第一类消费者垄断定价最优解为:

$$\max_{p} (p-5) \cdot (\frac{60-p}{4}) \implies p^m = 32.5, q^m = 26.25.$$

对第二类消费者垄断定价最优解为:

$$\max_{p} (p-5) \cdot (60-1.5p) \implies p^m = 22.5, q^m = 6.875.$$

我们现在根据图 9.4 分析如何实现区别定价。如果购买量下限 x 大于 x_2，那么消费者 2 在 $p=22.5$ 的情况下需求将低于 x，此时消费者 2 会选择价格 $p=32.5$。如果购买量下限 x 低于 x_1，那么消费者 1 在 $p=22.5$ 的情况下需求将高于 2，此时消费者 1 会选择价格 $p=22.5$。因此最终的价格下限 $x\in(6.875,26.25)$！由于 $x\in(6.875,26.25)$ 时，消费者 2 的需求量已经大于 x，会自发选择 $p=22.5$，因此我们只需关注如果制定 x 使消费者 1 以价格 $p=32.5$ 购买 $x_1=6.875$ 的产品即可。

(a) 当消费者 1 选择 $p=32.5$，购买 $q=6.875$ 时，其消费者剩余为 $\frac{(60-32.5)^2}{2\cdot 4}=94.53125$;

(b) 当消费者 2 选择 $p=22.5$,购买 x 时,其消费者剩余为 $\frac{(60-22.5)^2}{2\cdot 4}-\frac{(22.5-60+4x)\cdot(x-9.375)}{2}$;

因此为使消费者 1 选择 $p=32.5$，只需:

$$94.53125\geq\frac{(60-22.5)^2}{2\cdot 4}-\frac{(22.5-60+4x)\cdot(x-9.375)}{2}\iff x\geq 15.75.$$

□

小试牛刀. 王刚和李红作为一个小组完成作业。该作业通过与否是按照小组来评判的。通过对二人的效用都是 3，没通过的效用是 0。二人可以选不努力 (N)，低努力 (L)，和高努力 (H)。对于李红，三种努力的成本分别是 $0,1,2$；对于王刚，三种努力的成本分别是 $0,2,4$。只有当至少一个人选择 H 或者两人都选择 L 时，小组才能顺利通过。

(i) 写出所有博弈策略矩阵，并找出所有纳什均衡。

(ii) 如果李红可以观察王刚的策略后再选择自己的，写出子博弈精炼纳什均衡。

(iii) 如果王刚可以先观察李红的策略，再选择自己的策略，求子博弈精炼纳什均衡。

(iv) 王刚会更偏好谁先行动?

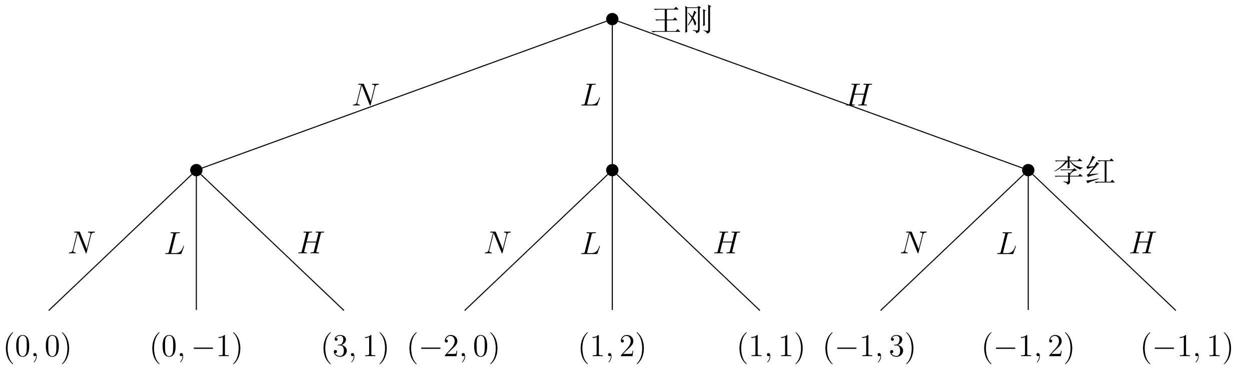
证明.

(i) 第一问直接写出支付矩阵即可，纳什均衡为：(N,H), (L,L)。

		李红 N	李红 L	李红 H
王刚	N	(0,0)	(0,-1)	(3,1)
王刚	L	(-2,0)	(1,2)	(1,1)
王刚	H	(-1,3)	(-1,2)	(-1,1)

该题不存在混合战略纳什均衡，就请读者来思考啦。

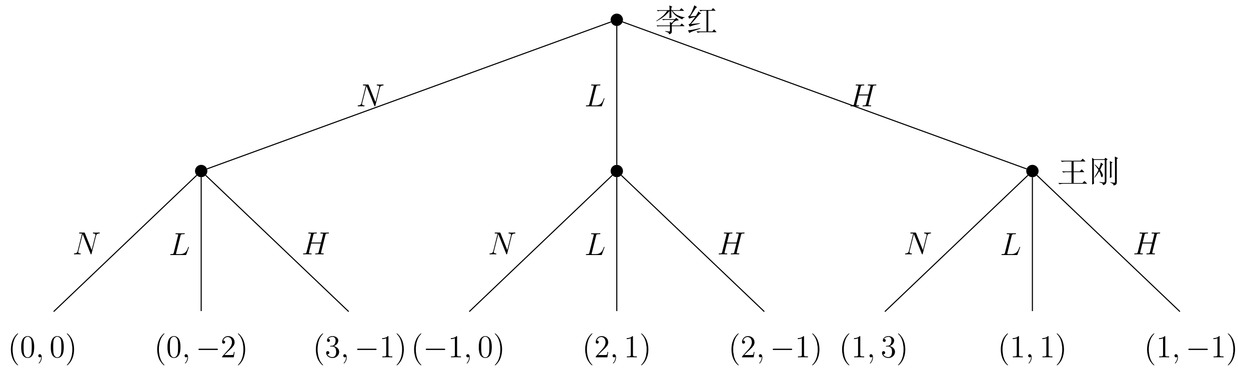
(ii) 第二问的博弈树如下：



因此，子博弈精炼纳什均衡为：

(a) 王刚选择 N；

(b) 如果王刚选择 N，那么李红选择 H；如果王刚选择 L，那么李红选择 L；如果王刚选择 H，那么李红选择 N。



(iii) 第三问博弈树如下：

因此，子博弈精炼纳什均衡为：

(a) 李红选择 L；

(b) 如果李红选择 N，那么王刚选择 N；如果李红选择 L，那么王刚选择 L；如果李红选择 H，那么王刚选择 N。

(iv) 王刚若先行动，则纳什均衡结果为：$(3,1)$；李红若先行动，则纳什均衡结果为：$(2,1)$。显然，王刚偏好先行动。

□

小试牛刀. 在肯德基附近开设电影院能够给肯德基带来一定收益，如果电影院线数量是 X，肯德基店面数量是 Y，电影院对肯德基有正外部性，则电影院的利润函数是 $48X - X^2$，肯德基的利润函数是 $60Y - Y^2 + XY$。

(i) 求二者独立决策时最优的 X 和 Y，并计算利润。

(ii) 如果肯德基收购了电影院并对 X、Y 进行决策，求出最优电影院线数量及肯德基店面数，并计算利润。

(iii) 如果仍然单独决策，但是肯德基承诺，每开一家电影院，它会提供 S 万元。请计算电影院线数量和肯德基店面数。

证明. 本问主要还是考察博弈论。

(i) 分别考虑电影院 (T) 和肯德基 (K) 的利润最大化问题。

$$\max_x \pi_M = 48X - X^2 \implies X^* = 24.$$

$$\max_Y \pi_K = 60Y - Y^2 + XY \implies Y^* = \frac{60+X}{2}.$$

由于改问假设博弈是完全信息的，因此肯德基知道电影院的利润函数，因此知道电影院会选择 $X^* = 24$。故而肯德基会选择 $Y^* = \frac{60+X}{2}\Big|_{X^*=24} = 42$。

最优利润为，

$$\pi_M^* = 576, \quad \pi_K^* = 1764$$

(ii) 此时肯德基的决策为:

$$\max_{X,Y} \pi = 48X - X^2 + 60Y - Y^2 + XY$$

一阶条件:

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = 48 - 2X + Y = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial Y} = 60 - 2Y + X = 0$$

因此:

$$X^* = 52, \quad Y^* = 56$$

(iii) 当面对补贴 S，电影院的最优决策为:

$$\max_X 48X - X^2 + SX \implies X^* = 24 + \frac{S}{2}$$

同理，完全信息假设暗示肯德基的最优决策为:

$$\max_Y 60Y - Y^2 + XY - SX\Big|_{X=24+\frac{S}{2}} \implies Y^* = 42 + \frac{S}{4}.$$

□

Chapter 10

2014 年解

小试牛刀. 一个淘金者挖到了价值 W 的金子，他考虑将这些金子从金矿运到城市中花掉，他的一个好朋友答应帮他免费运输，但是这些金子在运输途中有 p 的概率被偷，$1-p$ 的概率可以安全到达。假定该淘金者是风险厌恶者，给定其初始财富 W，效用函数 $U(W)$，请考虑以下两种运输方案：

- 一次性运输;
- 每次运输一半。

(i) 写出上述方案中各种可能发生的情况以及对应的概率和财富值。

(ii) 淘金者会选哪种方案？给出严格证明。

证明. 该题考查风险偏好。

(i) 分两类情况讨论：

- 一次性运输时：记为 A。

概率	p	$1-p$
财富	0	W

表 10.1: 一次性运输的财富分布

- 每次运输一半时：记为 B。

概率	p^2	$2p(1-p)$	$(1-p)^2$
财富	0	$\frac{W}{2}$	W

表 10.2: 每次运输一半时的财富分布

(ii) 消费者会选择 B。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}U(B)-\mathbb{E}U(A) &= (p^2-p)U(0)+\Big[(1-p)^2-(1-p)\Big]U(W)+2p(1-p)U(\frac{W}{2}) \\ &= (1-p)p\Big[-U(0)-U(W)+2U(\frac{W}{2})\Big]\end{aligned}$$

由于消费者风险厌恶，因此 $U(\cdot)$ 是凹函数：

$$\frac{U(0)+U(W)}{2}\geq U(\frac{W}{2})$$

因此, $\mathbb{E}U(B)-\mathbb{E}U(A)\geq 0$。

$\square$

小试牛刀. 一个垄断厂商所面临的需求为 $q=\frac{144}{p^2}$，成本函数为 $c(q)=q^{\frac{3}{2}}+5$。

(i) 该垄断厂商的利润最大化时的价格、产量、利润。

(ii) 假如政府进行价格管制，规定该产品价格不得高于每单位 4 元，则垄断厂商的产量是多少？利润是多少？

(iii) 如政府制定最高限价目标使垄断厂商在尽可能高的产量上进行生产，则最高限价为何种水平？

证明.

(i) 第一问很简单，就是我们普通的垄断模型。

$$
\begin{aligned}
\max_{q} \quad & \pi = p \times q - TC \\
s.t. \quad & q = \frac{144}{p^2}
\end{aligned}
$$

一阶条件，

$$\frac{d\pi}{dq}=\frac{6}{\sqrt{q}}-\frac{3}{2}\sqrt{q}=0 \implies q^*=4$$

最优价格与利润为，

$$p^*=6, \quad \pi^*=11.$$

(ii) 站在厂商的角度，若定价 $p=\bar{p}\le 4$，其可以选择的供给产量为 $q\in(0,\frac{144}{\bar{p}^2})$，因为对于任何 $q\le\frac{144}{\bar{p}^2})$ 的产量，消费者愿意支付的价格高于 $\bar{p}$。

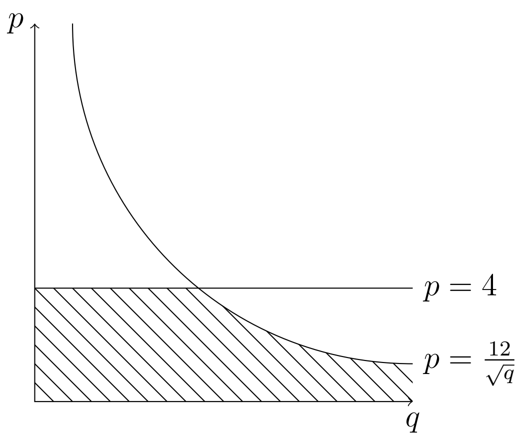


图 10.1: 价格限价 $p\le 4$ 下的可行域

因此，厂商面临如下问题：

$$\max_{p,q} \quad p\times q-q^{\frac{3}{2}}-5 \tag{10.1}$$

$$s.t. \quad p\le 4 \tag{10.2}$$

$$q\le \frac{144}{p^2} \tag{10.3}$$

列完最优化问题，同学们别慌，不要认为只有库恩塔克条件才能解决这个问题。我们先画出图像，逐个分析 (10.2) 和 (10.3) 两个约束条件。

- $p\le 4$ 是紧约束吗：当 $q\le\frac{144}{p^2}$ 时，增加 p 可以增加利润，但是会减少 $\frac{144}{p^2}$，导致 $q\le\frac{144}{p^2}$ 失效。所以我们无法判断 $p\le 4$ 是否是紧约束；
- $q\le\frac{144}{p^2}$ 是紧约束吗：当 $p\le 4$ 时，增加 q 不会改变约束 $p\le 4$，因此当 $q<\frac{144}{p^2}$ 时，给定 $p\le 4$，增加 q 可以增加利润当且仅当：

$$\frac{\partial\pi}{\partial q}=p-\frac{3}{2}\sqrt{q}\ge 0.$$

因此，可行域变为：

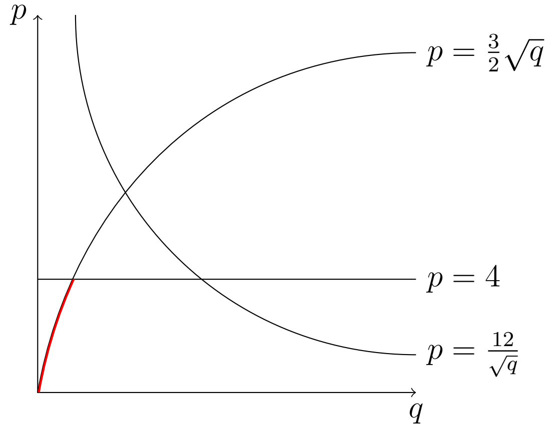


图 10.2: 价格限价 $p\le 4$ 下的可行域（红色部分）

厂商垄断问题变为：

$$\max_{p,q} \quad pq-q^{\frac{3}{2}}-5$$

$$s.t. \quad p\le 4$$

$$q=\frac{3}{2}\sqrt{q}$$

最优解为：

$$q^*=\frac{64}{9}, \quad \pi^*=\frac{121}{27}$$

(iii) 为求出最优的限价（使产量最大），按照第二问的分析，我们只需令 $\frac{4p^2}{9} = \frac{144}{p^2}$ 得

$$p^* = 3\sqrt{2}, \quad q^* = 8$$

□

评 3. 该题很有意思，其经典之处在于能够区分出来真正搞懂垄断模型的考生和生背解题方法的考生。本解题手册的第三部分对垄断模型提供了回顾，感兴趣的读者可以参考。

小试牛刀. 某个村子有 n 位村民和一笔财富 w，这笔财富在 k 位村民中平均分配 ($k \leq n$)，分到钱的村民 i 可以自己决定用多少钱来修路 (h_i)，多少钱用来私人消费 (X_i)。路的总和是：$H = \sum_{i=1}^{k} h_i$，每个村民的效用函数为 $U(H, X_i) = \sqrt{HX_i}$。此外，假设公路和私人消费的单价均为 1。

(i) 均衡下，H 为多少?

(ii) H 和 k 的关系是什么？为什么?

证明.

(i) 考虑分到钱的代表性村民 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$：假定其他村民决定修路之和为 h_{-i}

$$\begin{aligned} \max_{h_i, X_i} \quad & \sqrt{(h_i + h_{-i})X_i} \\ s.t. \quad & h_i + X_i = \frac{w}{k} \end{aligned}$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}_i = \sqrt{(h_i + h_{-i})X_i} + \lambda(\frac{w}{k} - h_i - X_i)$$

一阶条件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial h_i} &= \frac{X_i}{2\sqrt{HX_i}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial X_i} &= \frac{h_i + h_{-i}}{2\sqrt{HX_i}} - \lambda = 0 \end{aligned}$$

因此，给定当前的修路之和 h_{-i}，消费者 i 选择 h_i 使得总路长等于消费品的数量。由于对称性（代表性消费者因此代表每一位分到钱的消费者）：$h_i + h_{-i} = kh_i = X_i$。故，由预算约束解得

$$X_i + \frac{X_i}{k} = \frac{w}{k} \implies X_i = H = \frac{w}{k+1}.$$

(ii) 随着 k 增加，H 减少。

□

小试牛刀. 假设在某地的手机市场上，苹果手机和小米手机进行价格竞争，设小米手机的质量为 $s_1=1$，苹果手机的质量为 $s_2=2$，生产小米手机和苹果手机的边际成本都是 2。消费者的效用为：$u(s,p)=\theta s-p$，令 p_1 为小米手机，p_2 为苹果手机的价格，并且 $\theta\sim U[4,11]$。

(i) $p_1=3,p_2=10$ 时，$\theta=4$ 的消费者会选择哪个手机？求出无差异消费者。

(ii) 给定任意 (p_1,p_2)，找出这组价格下，无差异购买小米和苹果手机的消费者，并求出该消费者对苹果和小米手机的需求。

(iii) 如果苹果和小米手机同时决定价格，求出纳什均衡以及均衡时各自的利润。

证明.

(i) 当 $\theta=4$ 时:

$$u(s_1|\theta=4,p_1=3)=4\cdot 1-3=1>u(s_2|\theta=4,p_2=10)=4\cdot 2-10=-2.$$

因此，消费者 $\theta=4$ 会够买小米手机。无差异消费者 θ 购买小米手机和苹果手机效用相等，也就是

$$u(s_1|\theta,p_1=3)=\theta-3=u(s_2|\theta,p_2=10)=2\theta-10\implies\theta=7.$$

(ii) 无差异消费者:

$$u(s_1|\theta,p_1)=\theta-p_1=u(s_2|\theta=4,p_2)\implies\theta=p_2-p_1.$$

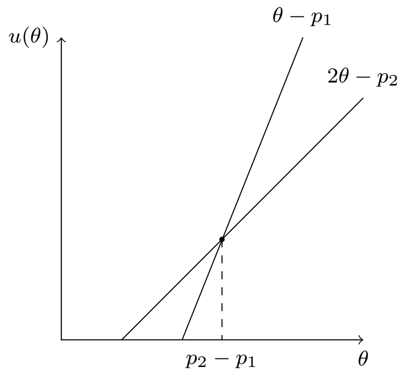


图 10.3: 无差异消费者 $\theta=p_2-p_1$

但注意到，题目说：$\theta\in[7,11]$，因此分类讨论，并记 $D_1(p_1,p_2)$ 为厂商 1 面临的需求，$D_2(p_1,p_2)$ 为厂商 2 面临的需求。

(a) 当 $p_2-p_1<4$ 时:

$$\begin{cases} D_1(p_1,p_2) & =0 \\ D_2(p_1,p_2) & =1 \end{cases}$$

(b) 当 $p_2 - p_1 \in [4, 11]$ 时：

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2) &= \dfrac{p_2 - p_1 - 4}{7} \\ D_2(p_1, p_2) &= \dfrac{11 - p_2 + p_1}{7} \end{cases}$$

(c) 当 $p_2 - p_1 > 11$ 时：

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2) &= 1 \\ D_2(p_1, p_2) &= 0 \end{cases}$$

(iii) 首先我们分析角点解（corner solution），然后我们再分析内点解（interior solution）。

(a) 角点解的情况：我们仅证明对于任意 (p_1, p_2)，$p_2 - p_1 \leq 4$ 时不可能是纳什均衡。因为 $p_2 - p_1 \geq 11$ 的情况同理。

i. $p_1 = 2$ 时：此时 $p_2 \leq 6$ 不可能是纳什均衡。因为当 $p_2 = 6$ 时是角点解情况下，厂商 2 利润最高的定价，此时 $\pi_2 = 4$。但，$p_1 = 2$，$p_2 = 7.5$ 厂商 2 可以获得利润 $\pi_2 = 5.89$。

ii. $p_2 = a > 2$ 时：此时 $p_2 = a + 4$ 是角点解下，厂商 2 利润最高的定价（此时厂商 1 利润为 0），此时厂商 1 可以定价 $p_1 = a - \varepsilon$ 来获得正利润。因此 $p_2 = a > 2$ 不可能是纳什均衡。

综上，纳什均衡仅可能是内点解。

(b) 内点解的情况：

i. 首先考虑厂商 1:

$$\max_{p_1} (p_1 - 2)\frac{p_2 - p_1 - 4}{7} \implies p_1^* = \frac{p_2 - 2}{2}$$

ii. 再考虑厂商 2:

$$\max_{p_2} (p_1 - 2)\frac{11 - p_2 + p_1}{7} \implies p_2^* = \frac{13 + p_1}{2}$$

联立反应函数得：

$$p_1^* = 3,\ p_2^* = 8,\ \pi_1^* = \frac{1}{7},\ \pi_2^* = \frac{36}{7}.$$

□

小试牛刀. 某海湾盛产一种龙虾，附近有一个村子以捕龙虾为生。经营一艘捕虾船每个月花费 200，若有 x 艘捕虾船，则捕虾船的总收入为 $f(x) = 1000(10.2x - x^2)$。

(i) 请计算最大化捕捉龙虾的总利润的船只数，此时最大化利润时多少?

(ii) 实际情况下，每个村民都有捕虾的权利，因此没有人可以限制别人的进入，此时会有多少艘捕虾船进入? 利润水平又是如何?

(iii) 该村委会决定发放捕虾许可证，提供许可证的成本为 0，每张许可证只允许一艘船使用。该村委会的目标是最大化从发放许可证中获得的利润。请问该村委会对发放每一张许可证收费多少? 村委会的利润时多少?

(iv) 请问从经济直觉上说明为什么 (ii) 问中的解时无效率的，而 (iii) 问可以解决这种无效率问题?

证明.

(i) 根据题意:

$$\max_x \ 1000(10.2x - x^2) \implies x^* = 5, \pi^* = 25000.$$

(ii) 由于捕虾是自由的，因此均衡时每个捕虾船利润为零，解得均衡数量:

$$\frac{f(x)}{x} = 200 \implies x^* = 10, \pi^* = 0.$$

(iii) 当村委会对许可证收取单位价格 k 时，均衡的捕虾船数量为:

$$\frac{f(x)}{x} = 200 + k \implies x^*(k) = 10 - \frac{k}{1000}$$

已知 x^* 关于 k 的关系后，村委会选择 k 使得利润最大化:

$$\max_k \ k \cdot 10 - \frac{k}{1000} \implies k^* = 5000,\ x^* = 5.$$

(iv) (ii) 中存在外部性问题，而 (iii) 通过征税的方式纠正了外部性。

□

Chapter 11

2015 年解

小试牛刀. 一个人有 250000 元的资产，他从中拿出 200000 元用来买车，车出事故的概率为 5%，出事故后，车子的价值降为 40000 元。已知这个人的效用函数是：$u(W) = \sqrt{W}$。

(i) 你认为这个人是风险爱好、风险中性还是风险厌恶，并说明原因。

(ii) 求补偿所有损失的完全保险愿意支付的最高价格，并结合数学等式与图形加以说明。

(iii) 求补偿所有损失的公平保险价格，并结合数学等式与图形加以说明。

(iv) 结合 (ii) 和 (iii)，判断保险市场是否存在交易的可能，并说明原因。

证明.

(i) 该消费者风险厌恶。原因在于：对于彩票 $(w_1, \ldots, w_n)$ 以及 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$$u(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i) \geq \lambda_i u(w_i) \iff E(p) \succsim C(p).$$

(ii) 完全保险：一种使得被保险的受益人在每一种不确定性结果下都一样好的保险。愿意支付的最高价格应该使得受保人在接受保险和不接受保险之间无差异，即不确定性被消除。因此，

$$\sqrt{250000 - p} = 0.05\sqrt{90000} + 0.95\sqrt{25000} \implies p = 9900.$$

(iii) 公平保险：使保险公司期望利润为零的保险政策。设保费为 p，出事后保险公司赔付 r，则当出事概率为 π 时，保险公司期望利润为零当且仅当：

$$p = \pi r = \iff p = 0.05 \cdot 160000 = 8000.$$

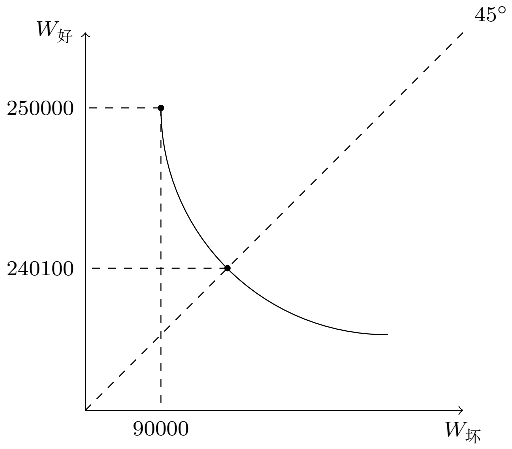


图 11.1: 受保人愿意支付的最高完全保险价格：p

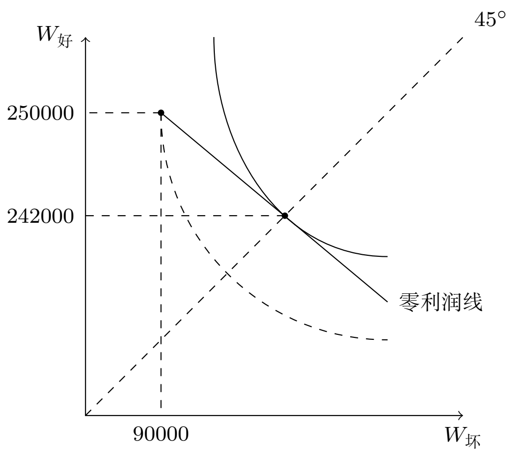


图 11.2: 赔偿全部损失的公平保险价格：p

(iv) 存在交易可能，因为在完全保险下，厂商愿意接受的最低价格低于消费者愿意支付的最高价格。

□

小试牛刀. 已知某产品的生产函数为 $f(x_1, x_2) = \min\{x_1^a, x_2^a\}, a > 0$, x_1, x_2 为生产要素，生产要素的价格为 $w_1 = 10, w_2 = 20, p = 50$, p 为产品价格；

(i) 求规模报酬递增、规模报酬不变、规模报酬递减情况下 a 的取值范围。

(ii) 求利润最大化时的 x_1, x_2 的要素需求函数。

(iii) 求成本函数。

(iv) 前面的 (ii), (iii) 问如何依赖于 a 的取值。

证明.

(i) 对于 $\lambda \in \mathcal{R}_+$,

$$f(\lambda a x_1, \lambda a x_2) = \lambda^a f(x_1, x_2)$$

因此，

(a) 规模报酬递增时：$a > 1$;

(b) 规模报酬不变时：$a = 1$;

(c) 规模报酬递减时：$a \in (0, 1)$。

(ii) 利润最大时：

$$\max_{x_1, x_2} \ pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

由于利润最大化时，生产必然是有效率的，因此 $x_1 = x_2 = x$，问题转化为：

$$\max_x \ px^a - w_1 x - w_2 x \implies x^* = (\frac{3}{5a})^{\frac{1}{a-1}}.$$

(iii) 成本函数时给定产量 q，成本最小化的解：

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ s.t. \quad & f(x_1, x_2) = q. \end{aligned}$$

在成本最小化时，生产必然是最优的，即：$x_1 = x_2 = x = q^{\frac{1}{a}}$，问题转化为：

$$\begin{aligned} \min_x \quad & (w_1 + w_2)x \\ s.t. \quad & x = q^{\frac{1}{a}}. \end{aligned}$$

解出成本函数为：$c(q) = 30q^{\frac{1}{a}}$。

(iv) 分两类情况讨论：

(a) $a \in (0, 1)$：要素需求函数存在；成本函数存在；

(b) $a \geq 1$：要素需求为无穷大；成本函数存在。

□

小试牛刀. 有两个合伙人 1 和 2，他们共同创办了一家企业，两个人的努力程度分别为 $e_1, e_2(e_1, e_2 > 0)$，各自的努力成本函数为 $C(e_i) = \frac{e_i^2}{2}$，合伙公司的收入函数为 $R(e_1, e_2) = e_1 + e_2 + \frac{e_1 e_2}{2}$；

(i) 若两人采取合作共赢策略，此时 $\pi = R(e_1, e_2) - C(e_1) - C(e_2)$，求利润最大化时双方的努力程度 e_1, e_2。

(ii) 若两人平分收入，每个人只考虑自己的努力程度，求纯策略纳什均衡。

(iii) 在 (ii) 中，若两人提前签订契约：若公司收入大于 6，两人就平分收入；若小于 6，公司的收入捐献给慈善机构。证明在此情况下 (i) 为纯策略纳什均衡。

证明.

(i) 根据题意：

$$\max_{e_1, e_2} e_1 + e_2 + \frac{e_1 e_2}{2} - \frac{e_1^2}{2} - \frac{e_2^2}{2} \implies e_1^* = e_2^* = 2.$$

(ii) 由于两位参与人是对称的，因此我们在这里考虑第一位参与人：

$$\max_{e_1} \pi_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + \frac{e_1 e_2}{2}) - \frac{e_1^2}{2}$$
$$\frac{d\pi_1}{de_1} = \frac{1}{2} + \frac{e_2}{4} - e_1 = 0 \implies e_1^*(e_2) = \frac{e_2}{4} + \frac{1}{2}.$$

同理，得出第二位参与人的反应函数：

$$e_2^*(e_1) = \frac{e_1}{4} + \frac{1}{2}.$$

联立参与人的反应函数得：

$$e_1^* = e_2^* = \frac{2}{3}.$$

(iii) 由于两位参与人是对称的，在这里我们仅考虑第一位参与人。给定 $e_2 = 2$:

(a) 若 $e_1 \in (0, 2)$: $\pi < 6 \implies \pi_1 = 0 - \frac{e_1^2}{2} < 0$;

(b) 若 $e_2 \in [2, +\infty]$: $\pi_1 = e_1 + 1 - \frac{e_1^2}{2}$。该利润函数在 $e_1 = 2$ 时去的条件极值 $\pi_1 = 1$。

因此给定 $e_2 = 2$，$e_1 = 2$ 是参与人 1 的最优选择。对于参与人 2，同理可得。

□

小试牛刀. 小李与小王博弈，小李首先开始行动，他可以选择 H 或者选择 L。小王无法观测到小李的行为，但是他可以获得信号 h 与 l，并有如下分布：

- $Pr(h|H) = p$;
- $Pr(l|H) = 1 - p$;
- $Pr(h|L) = q$;
- $Pr(l|L) = 1 - q$。

其中 $p > 0.5 > q$。在观测信号 h 与 l 上，小王可以选择 A 或者 B，支付矩阵如下：

行动组合	小李的收益	小王的收益
HA	5	2
HB	2	1
LA	6	1
LB	4	2

(i) 若 $p = 1, q = 0$，求小王的所有可能策略、收益矩阵以及纯策略纳什均衡。

(ii) 若 $p < 1, q > 0$，求小王的所有可能策略。

(iii) 若 $p = 1, q > 0$，求小王的所有可能策略。

证明. 为便于分析，先画出博弈树：

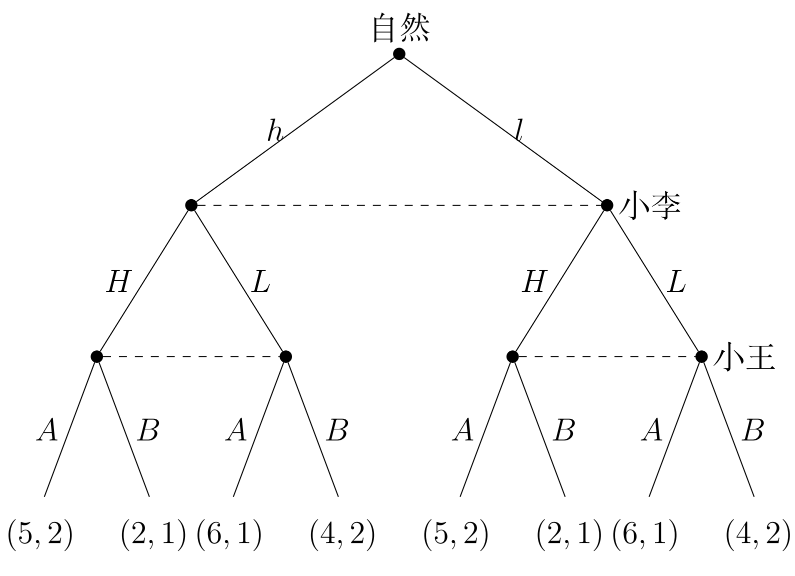


图 11.3: 小李小王博弈

当然，对于信号博弈，我们一般用下面形式的博弈树表示。

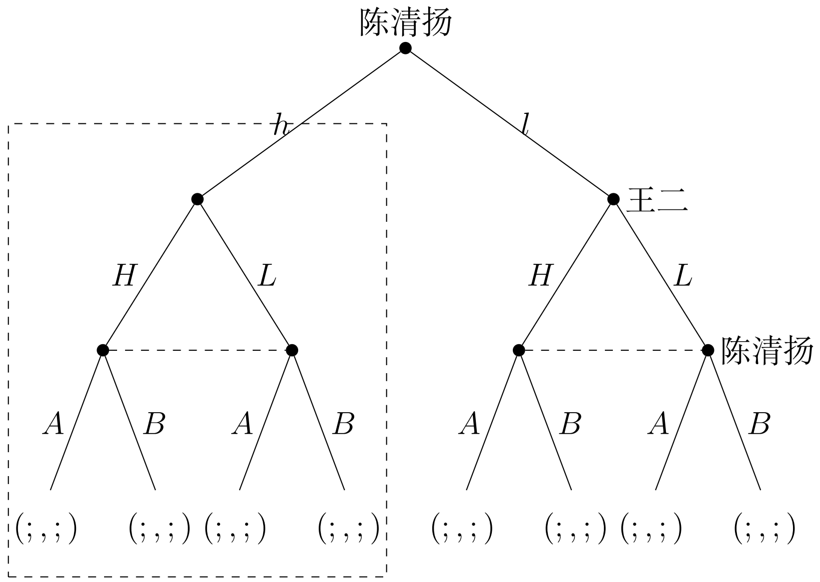


图 11.4: 小李小王博弈

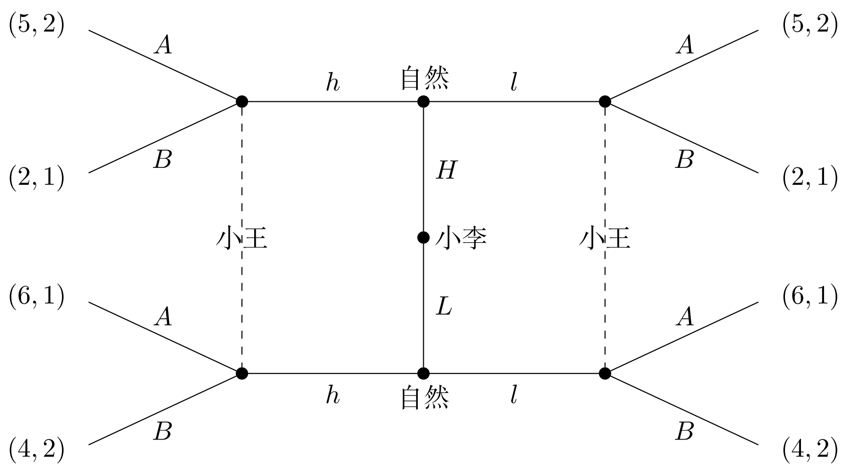


图 11.5: 小李小王博弈

(i) 第一题很简单，我们首先画出支付矩阵：并且假设小王的战略 (C,D) 为观测到 h 信号选择 C，观测到 l 信号选择 D。

		小王			
		(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
小李	H	$(5,2)$	$(5,2)$	$(2,1)$	$(2,1)$
	L	$(6,1)$	$(4,2)$	$(6,1)$	$(4,2)$

图 11.6: 支付矩阵：当 $p=1,q=0$ 时

不难看出，纳什均衡为 $(H,(A,B)),(L,(B,B))$。

(ii) 第二问有区分度，我们逐个分析小王的每一个策略，小王的策略 (C,D) 表示：当接收到 h 信号时小王选择 C，当接收到 l 信号时，小王选择 D。

(a) 混同均衡 (A,A)：

i. 给定小王的策略 (A,A)，小李选择 H 和 L 的期望收益如下：

$$\mathbb{E}U(H)=5,\ \ \mathbb{E}U(L)=6.$$

因此小王会选择 L。

ii. 给定小李的策略 L，小王选择混同策略 (B,B) 的期望收益为 2，然而选择 (A,A) 的期望收益为 1。因此 (A,A) 并不是小王可能的策略。

(b) 混同均衡 (B,B)：

i. 给定小王的策略 (B,B)：小李选择 H 和 L 的期望收益如下：

$$\mathbb{E}I(H)=2,\ \ \mathbb{E}U(L)=4.$$

因此小李会选择 L.

ii. 给定小李的策略 L，小王的策略 (B,B) 是最优的。

(c) 分离均衡 (A,B)：给定小王的策略 (A,B)：小李选择 H 和 L 的期望收益如下：

$$\mathbb{E}U(H)=Pr(h|H)\cdot 5+Pr(l|H)\cdot 2=3p+2$$
$$\mathbb{E}U(L)=Pr(h|L)\cdot 6+Pr(l|L)\cdot 4=2q+4$$

分两类情况讨论：

i. 当小李选择 H 时：$3p+2>2q+4$。此时 (A,A) 对小王来说优于 (A,B)。

ii. 当小李选择 L 时：$3p+2<2q+4$。此时 (B,B) 对小王来说优于 (A,B)。

综上，分离均衡 (A,B) 不可能是小王可能的策略。

(d) 分离均衡 (B, A)：给定小王的策略 (B, A)，小李选择 H 和 L 的期望收益如下：

$$\mathbb{E}U(H) = Pr(h|H) \cdot 2 + Pr(l|H) \cdot 5 = 5 - 3p$$
$$\mathbb{E}U(L) = Pr(h|L) \cdot 4 + Pr(l|L) \cdot 6 = 6 - 2q$$

分两类情况讨论：

i. 当小李选择 H 时：$5 - 3p > 6 - 2q$。此时 (A, A) 对小王来说优于 (B, A)。

ii. 当小李选择 L 时：$5 - 3p < 6 - 2q$。此时 (B, B) 对小王来说优于 (A, B)。

综上，分离均衡 (B, A) 不可能是小王可能的策略。

综上小王可能的策略只有 (B, B)。

(iii) 根据第二问分析，小王可能的策略只有 (B, B)，并且 (B, B) 不取决于 p, q。因此，小王可能的策略只有 (B, B)。

□

小试牛刀. 某国际卫星电视转播公司要在北京、天津两地开设电视转播产品。已知此产品在北京的需求函数为 $q_B = 60 - 0.25p_B$，天津的需求函数为 $q_T = 100 - 0.5p_T$。项目成本为 $c(q) = 1000 + 40q$，其中 $q = q_B + q_T$。

(i) 求北京和天津分别利润最大化时的销量与定价；

(ii) 若北京、天津两地定价相同，求定价以及销量。

(iii) 以上两种情F那种情况的利润最大？以消费者剩余计算两地消费者更喜欢那种情况，并说明原因。

证明.

(i) 先考虑在天津的垄断定价:

$$\max_{q_T} (-2q_T + 200)q_T - 1000 - 40q_T \implies q_T^* = 40;\ p_T^* = 120.$$

再考虑在北京的垄断定价:

$$\max_{q_B} (-4q_B + 240)q_B - 1000 - 40q_B \implies q_B^* = 25;\ p_T^* = 140.$$

(ii) 统一定价时，分两类情况讨论：

(a) 保留两个市场：

$$\begin{aligned} \max_p \quad & (160 - 0.75p)p - 1000 - 40(160 - 0.75p) \\ s.t. \quad & p \le 200 \end{aligned}$$

解得：

$$p^* = \frac{380}{3},\ q_T^* = \frac{110}{3},\ q_B^* = \frac{85}{3}.$$

(b) 只保留大市场：

$$\begin{aligned} \max_p \quad & (60 - 0.25p)p - 1000 - 40(60 - 0.25p) \\ s.t. \quad & p \in [200, 240] \end{aligned}$$

解得：

$$p^* = 200,\ q_T^* = 0,\ q_B^* = 10.$$

因此最优解为：$p^* = \frac{380}{3}, q_T^* = \frac{110}{3}, q_B^* = \frac{85}{3}$.

(iii) 分两类情况讨论消费者剩余：

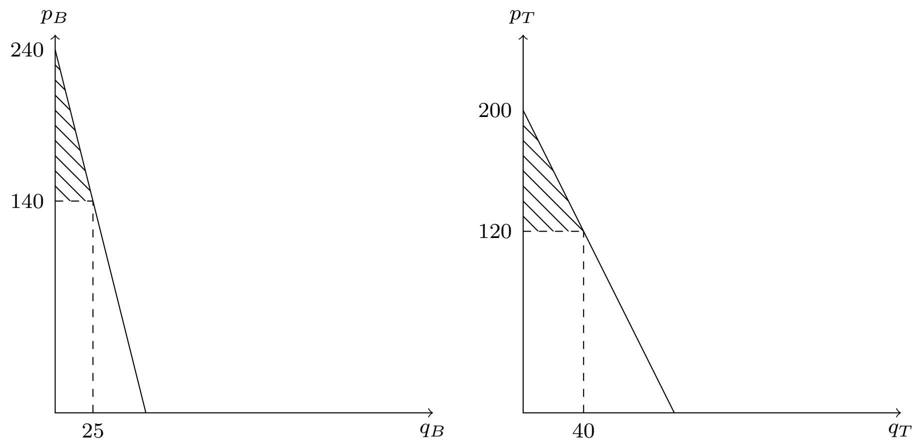


图 11.7: 区别定价时的消费者剩余

(a) 北京和天津区别定价时:

$$CS_B = (240 - 140) * 25 * \frac{1}{2} = 1250;$$
$$CS_T = (200 - 120) * 24 * \frac{1}{2} = 1600.$$

此时总消费者剩余为:

$$CS = CS_B + CS_T = 2850.$$

(b) 北京和天津统一定价时:

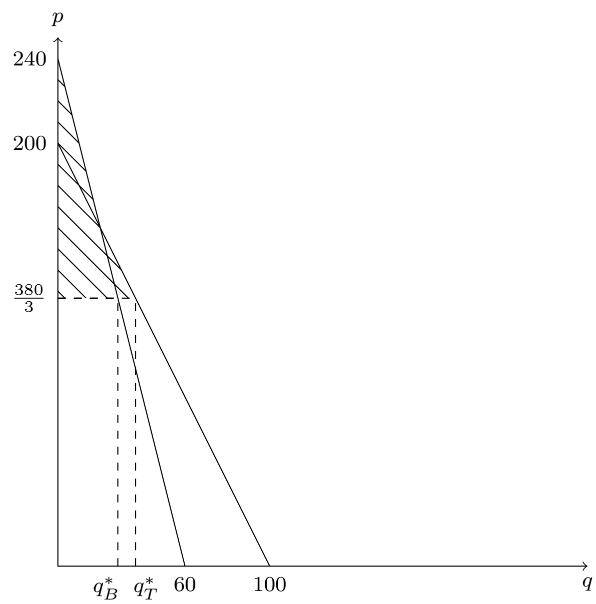


图 11.8: 北京和天津统一定价时的消费者剩余

此时总消费者剩余为:

$$CS = (200 - \frac{380}{3}) * \frac{110}{3} * \frac{1}{2} + (240 - \frac{380}{3}) * \frac{85}{3} * \frac{1}{2} = 2950.$$

显然，消费者更偏好统一定价。

□

Chapter 12

2016 年解

小试牛刀. 甲、乙两名消费者考虑消费两种商品：馅饼（其消费量记为 x_1）与其他商品 (其消费量记为 x_2)。两种商品价格分别为 $p_1 = 10, p_2 = 1$。甲乙二人有相同的效用函数：$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$，同时，二人的收入同为 $I = 100$ 元。甲乙二人的唯一区别在于，乙有一张馅饼的折扣券，使用该折扣券能以 50% 的价格购买任何数量的的饼（折扣券只能使用一次），甲没有折扣券。

(i) 计算两名消费者各自对于两种商品的最优消费量。

(ii) 假设在实际购买商品之前，甲和乙商量能否以一定的价格将乙的折扣券卖给甲。甲为了得到折扣券最高愿意付多少钱？

(iii) 乙为了出让折扣券至少应该得到多少钱？

(iv) 乙能否与甲达成一定的协议价格从而将手中的折扣券转让给甲？

证明.

(i) 分两类情况讨论：

(a) 消费者甲面临：

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & \sqrt{x_1 x_2} \\ s.t. \quad & 10x_1 + x_2 \le 100 \end{aligned}$$

最优解为：

$$x_1^* = 5, x_2^* = 50.$$

(b) 消费者乙面临：

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & \sqrt{x_1 x_2} \\ s.t. \quad & 5x_1 + x_2 \le 100 \end{aligned}$$

最优解为：

$$x_1^* = 10, x_2^* = 50.$$

(ii) 假设消费者甲最高愿意支付 w，则消费者甲购买折扣券后的效用应不低于购买折扣券之前的效用。

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & \sqrt{x_1x_2} \\ s.t. \quad & 5x_1 + x_2 \leq 100 - w \end{aligned}$$

最优解为：

$$x_1^* = \frac{100-w}{10}, x_2^* = \frac{100-w}{2}.$$

此时，消费者甲效用为：

$$u_{\text{甲}} = \sqrt{\frac{100-w}{10} \cdot \frac{100-w}{2}} \geq \sqrt{5 \cdot 50} \implies w = 100 - 50\sqrt{2} \approx 29.3$$

(iii) 假设消费者乙最低愿意接受 w，则消费者乙出售消费券以后的效用应不低于出售折扣券之前的效用。

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & \sqrt{x_1x_2} \\ s.t. \quad & 10x_1 + x_2 \leq 100 + w \end{aligned}$$

最优解为：

$$x_1^* = \frac{100+w}{20}, x_2^* = \frac{100+w}{2}.$$

此时，消费者乙效用为：

$$u_{\text{乙}} = \sqrt{\frac{100+w}{20} \cdot \frac{100+w}{2}} \geq \sqrt{10 \cdot 50} \implies w = 100\sqrt{2} - 100 \approx 41.4$$

(iv) 交易无法达成，因为乙愿意接受的最低价格高于甲愿意支付的最高价格。

□

小试牛刀. 一个垄断厂商生产两种产品,各自的市场需求函数为 $D_1(p_1,p_2)=\frac{3-p_2}{p_1^2}, D_2(p_1,p_2)=\frac{3-p_1}{p_2^2}$，厂商的成本函数为 $C(y_1,y_2)=y_1+y_2$，y_1 和 y_2 分别代表两种产品的销量。

(i) 请问两种商品为互补品还是替代品?

(ii) 请写出垄断厂商的利润（表示为 p_1 和 p_2 的函数）。

(iii) 若商品价格受到管制：政府要求 $p_2=1$，$p_1\in[0,3]$。厂商追求利润最大化目标，则 p_1 应为多少?

(iv) 若厂商能让两种商品保持相同的价格，即 $p_1=p_2=p$，求最优价格 p。

证明.

(i) 由于商品 1 和商品 2 的需求是对称的，因此我们仅考虑商品 1。由于：

$$\frac{\partial D_1(p_1,p_2)}{\partial p_2}=-\frac{1}{p_1^2}<0.$$

因此，两个商品为互补品。

(ii) 垄断厂商利润为：

$$\pi(p_1,p_2)=\frac{3-p_2}{p_1^2}\cdot p_1+\frac{3-p_1}{p_2^2}\cdot p_2-(\frac{3-p_2}{p_1^2}+\frac{3-p_1}{p_2^2})$$

(iii) 根据题意，厂商选择 $p_1\in[0,3]$ 使利润最大化：

$$\pi=\frac{2}{p_1}+(3-p_1)-(\frac{2}{p_1^2}+3-p_1)$$

一阶条件：

$$\frac{d\pi}{dp_1}=-\frac{2}{p_1^2}-1-(\frac{-4}{p_1^3}-1)\implies p_1^*=2\in[0,3].$$

(iv) 根据题意，厂商选择 p:

$$\max_p\ \pi=\frac{3-p}{p}+\frac{3-p}{p}-(\frac{3-p}{p^2}+\frac{3-p}{p^2})$$

一阶条件：

$$\frac{d\pi}{dp}=-\frac{8}{p^2}+\frac{12}{p^3}\implies p^*=1.5.$$

□

小试牛刀. 某消费者面临跨期消费选择问题。假设此消费者在今天的消费量为 c_0，在明天的消费量为 c_1，两期的价格均为 1。假设该消费者今天的收入为 $I_0 = 100$，设明天的收入为 I_1。消费者的效用函数是 $u(c_0, c_1) = ln(c_0) + ln(c_1)$，消费者可以选择储蓄，但不能向他人借款，假设利率水平为 $r = 0$，求：

(i) 若明天的收入 $I_1 = 34$，求此消费者的消费决策。

(ii) 若明天的收入存在两种可能，分别是 $I_1 = 100$ 和 $I_1 = 0$，两种可能性发生的概率各为 50%，求此消费者的消费决策。

证明.

(i) 当 $I_1 = 34$ 时：

$$\max_{c_0,c_1} \quad ln(c_0) + ln(c_1) \tag{12.1}$$

$$s.t. \quad c_0 \leq 100 \tag{12.2}$$

$$c_0 + c_1 \leq 134 \tag{12.3}$$

对于这类问题，我们可以采用"先忽略"约束 (12.2)，算出最优解后验证最优解满足 (12.2) 的方法。因此，忽略约束 (12.2) 后，消费者跨期优化问题转变为：

$$\max_{c_0,c_1} \quad ln(c_0) + ln(c_1)$$

$$s.t. \quad c_0 + c_1 \leq 134$$

最优解为：

$$c_0^* = c_1^* = 67.$$

(ii) 第二问咋一看比较唬人，其实仔细分析后，我们可以发现无论收入是多少，预算约束线一定是满足的，因此自由变量 (free variable) 其实只有 c_0。因此，消费者面临的问题是：

$$\max_{c_0} \ \frac{1}{2}\Big[ln(c_0) + ln(200 - c_0)\Big] + \frac{1}{2}\Big[ln(c_0) + ln(100 - c_0)\Big]$$

解得：

$$c_0 = \frac{900 \pm 100\sqrt{17}}{8}$$

由于不能借债，因此 $c_0 \leq 100$，故最终 $c_0 = \frac{900-100\sqrt{17}}{8}$

□

小试牛刀. 谷歌和百度在市场进行质量竞争，谷歌的质量是 r_1，百度的质量为 r_2。质量 r_1 和 r_2 介于 0 至 5 之间。谷歌的收入函数为 $200\big[0.5+0.05(r_1-r_2)\big]$，成本函数为 $c_1=r_1^2$；百度的收入函数为 $200\big[0.5+0.05(r_2-r_1)\big]$，成本函数为 $c_2=1.25r_2^2$。试求：

(i) 若百度收购了谷歌，那么利润最大化时的质量 r_1 和 r_2 分别为多少?

(ii) 若百度和谷歌进行寡头竞争，r_1 和 r_2 分别为多少? 各自的利润分别为多少? 总的质量为多少? 和 (i) 的总质量相比如何?

(iii) 若谷歌有一个投资计划，投入 60 单位的费用进行宣传和市场推广，投资之后的市场结构会发生变化：即谷歌的收入函数变为 $200\big[0.75+0.05(r_1-r_2)\big]$，百度的收入函数变为 $200\big[0.25+0.05(r_2-r_1)\big]$，假设各自成本不变。请问谷歌会做这项投资么?

证明.

(i) 根据题意写出表达式：

$$\max_{r_1,r_2}\ 200\big[0.5+0.05(r_1-r_2)\big]+200\big[0.5+0.05(r_2-r_1)\big]$$

最优解为：

$$r_1^*=r_2^*=0.$$

(ii) 首先考虑谷歌，然后考虑百度。

(a) 谷歌会考虑：给定 r_2，

$$\max_{r_1}\ 200\big[0.5+0.05(r_1-r_2)\big]-r_1^2$$

一阶条件解得：

$$r_1^*=5$$

(b) 百度会考虑：给定 r_1，

$$\max_{r_2}\ 200\big[0.5+0.05(r_2-r_1)\big]-1.25r_2^2$$

一阶条件解得：

$$r_2^*=4$$

因此，$\pi_1^*=85,\pi_2^*=70$。总质量为 9，和 (i) 中相比质量增加。

(iii) 首先考虑谷歌，然后考虑百度。

(a) 在花费 60 元推广后，谷歌会考虑：给定 r_2，

$$\max_{r_1}\ 200\big[0.75+0.05(r_1-r_2)\big]-r_1^2-60$$

一阶条件解得：

$$r_1^*=5$$

(b) 百度会考虑：给定 r_1，

$$\max_{r_2}\ 200\big[0.25+0.05(r_2-r_1)\big]-1.25r_2^2$$

一阶条件解得：

$$r_2^*=4$$

此时，$\pi_1^*=75$ 小于推广前的利润，因此谷歌不会推广。

□

小试牛刀. 在一个完全竞争的钢铁市场，市场的需求函数为 $p_d = 20 - q$，市场的供给函数为 $p_s = 2 + q$。炼钢企业的污染边际损耗是 $MD = 0.5q$。

(i) 画出需求曲线、供给曲线、边际损耗曲线以及社会的边际成本曲线。

(ii) 如果企业不对污染采取措施，那么市场的均衡价格和产量是多少?

(iii) 请问社会最优的产量是什么？相应的污染成本为多少?

(iv) 请问污染的外部性造成的社会福利损失为多少?

(v) 政府能否通过对产量征税从而达到社会最优产量水平？如果可以，如何征税?

Chapter 13

2017 年解

Chapter 14

2018 年解

Chapter 15

2019 年解

Chapter 16

2020 年解

Part III

温故知新

第三部分涉及我们对一些知识点的总结，但需要说明的是这些总结只是非常非常简明的总结，并不能作为入门读物使用。有一些章节我们用中文写作，有一些章节我们用英文写作。原因在于，有一些术语不太好翻译，我们担心我们的塑料翻译会误导大家；此外在一些比较具有技术性的话题上利用英文写作也便于读者查找文献时更容易融会贯通。

第三部分的安排如下：首先我们会为大家介绍博弈论，其中在不完全信息动态博弈我们会重点介绍两个模型：信号博弈 (Signaling Game) 和声誉模型 (Reputation Model)。在接下来的一章，我们会介绍垄断模型，垄断一直是光华的考点，大家千万要学扎实，学透。然后，我们会介绍不确定性，主要是给大家介绍保险模型。最后，我们会为大家介绍一个 Herstein-Milnor Theorem，这个定理不要求大家掌握，因为这个定理只是为期望效用理论奠基，也就是因为这个定理的存在，我们才可以用 $\sum_i u(a_i)p(a_i)$ 来代表期望效用。

我们力图使用最基础的工具来讲解这些模型，因此大家不必害怕其中的数学。根据我们的经验，您只需要掌握基础的微积分和概率论即可。

Chapter 17

博弈论

我们希望利用本章为大家提供一个（最入门的）博弈论介绍。[1] 和 [6] 是非常棒的参考书。博弈论，乍一听仿佛学会了就能在各种游戏中博得先机，实际上博弈论研究的内容并非“如何帮助你在游戏中赢得成功”（不然经济学家还教书干嘛，直接去赌博算了），而是研究“一旦实现可某种可能的情况，这个情况就会维持下去，谁也不会改变自己的行动。”而这些可能的情况，就被经济学家称为“均衡”。

17.1 完全信息静态博弈

完全信息静态博弈是最基本的一种模型。其中：

(i) 完全信息：指的是这个模型中的游戏参与者知道自己和所有人在各种战略组合下的报酬；

(ii) 静态博弈：指的是这个模型中的游戏参与者在选择自己的战略时，不知道其他人选择的战略。

在给出正式定义之前，我们先提供一个完全信息静态博弈的例子。

		韩梅梅	
		互相揭发	死不承认
李雷	互相揭发	(-5,-5)	(0,-10)
	死不承认	(-10,0)	(-1,-1)

图 17.1: 囚徒困境

假设李雷、韩梅梅盗窃出版社英语教材被警方抓获。警方分别对二位家喻户晓的人物进行审讯：

(i) 若你们二位都互相揭发对方，则各判有期徒刑 5 年；

(ii) 若一方揭发对方，另一方死不承认，则揭发方无罪释放，被揭发方判 10 年；

(iii) 若双方都揭发对方（友谊的小船这不就翻了），则各判 1 年。

该博弈是完美信息，因为李雷和韩梅梅都知道对方在各种情况下的效用；该博弈也是静态的，因为李雷的韩梅梅在选择“互相揭发”和“死不承认”的时候，并不知道对方选的是什么。

结果 17.1. 李雷和韩梅梅会相互揭发。我们首先考虑李雷的想法：如果韩梅梅选择互相揭发，那我（李雷）也会选择互相揭发；如果韩梅梅选择死不承认，那我选择互相揭发。所以，无论韩梅梅怎么选，我李雷都会选择互相揭发。站在韩梅梅的角度来想，无论李雷怎么选，韩梅梅也会选择相互揭发。在这里，（相互揭发，相互揭发）就是一个纳什均衡。

在给出纳什均衡的定义之前，我们要明确一个重要的概念：战略。战略是参与人在各种情况下的选择，听起来很拗口，实际上不难理解，请注意下面的两个例子。

例 17.1 (战略的例子)**.**

(i) 第一个例子：在我们的李雷、韩梅梅偷书博弈中，“互相揭发”和“死不承认”分别是李雷和韩梅梅的一个战略。

		韩梅梅	
		互相揭发	死不承认
李雷	互相揭发	(-5,-5)	(0,-10)
	死不承认	(-10,0)	(-1,-1)

图 17.2: 囚徒困境

(ii) 第二个例子：假设男生把女生惹生气了，男生如果认错，那么博弈结束；男生如果选择吵架，女生可以选择拌嘴或者原谅，博弈则结束。

在这个例子中，男生的战略有“吵架”或“认错”，女生的战略有“当男生选择吵架时，我选择拌嘴”和“当男生选择吵架时，我选择原谅”。

我们给出纳什均衡的定义。

定义 1 (纳什均衡)**.** 战略组合 $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ 是纳什均衡，如果对于每一个参与人 i，s_i^* 是给定其他参与人选择 $s_{-i}^* = (s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ 下参与人 i 的最优战略，即：

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall s_i \in S_i.$$

从直觉上看，纳什均衡是所有参与人选择的战略的组合，在这个组合下，每个人都没有动机改变自己的战略，因此我们说这个战略组合是一个均衡。

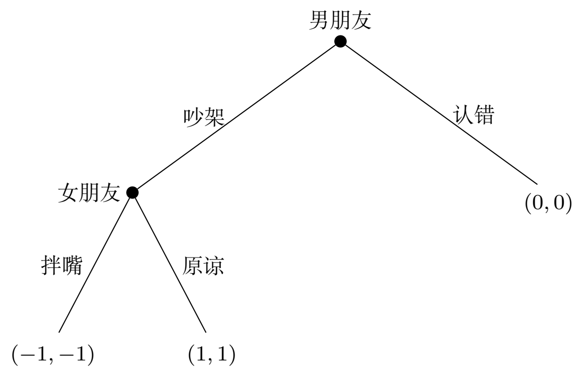


图 17.3: 吵架博弈

17.1.1 古诺模型

为了让读者对纳什均衡有一个更深刻的印象，我们考虑下面这个模型：

(i) 两个相同的公司；

(ii) 每个公司的成本函数是：$C(q_i) = cq_i, c \geq 0, i = 1, 2$；

(iii) 市场的需求函数是：$p = a - bQ$，此时 $Q = q_1 + q_2$。

该模型的纳什均衡是什么？首先，纳什均衡是各个参与人战略的组合，因此我们要明确参与人的战略。在这个模型中，参与人的战略是产量选择 q。我们站在公司 1 的角度考虑问题：

公司 1 在想什么？ 公司 1 会想：如果公司 2 生产 q_2，那我生产多少 q_1 可以最大化我的利润？因此，公司 1 的目标是：

$$\max_{q_1}(a - bq_1 - bq_2 - c)q_1 \implies q_1^* = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

这说明，如果公司 2 生产 q_2，那我就生产 $q_1^* = \frac{a-bq_2-c}{2b}$，这是符合直觉的，因为当我的平均成本 (c) 增加时，给定 q_2，最优的 q_1^* 会降低；q_2, a 对 q_1^* 的影响同理。由于公司 1 和公司 2 是对称的，因此从公司 2 的视角看，当公司 1 生产 q_1 时，公司 2 的最优产量为：

$$q_2^* = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$$

结果 17.2. 古诺模型的纳什均衡是：$(q_1, q_2) = (\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b})$。因为给定公司 2 生产 $\frac{a-c}{3b}$ 时，公司 1 生产 $\frac{a-c}{3b}$ 是最优的；给定公司 1 生产 $\frac{a-c}{3b}$ 时，公司 2 生产 $\frac{a-c}{3b}$ 是最优的。

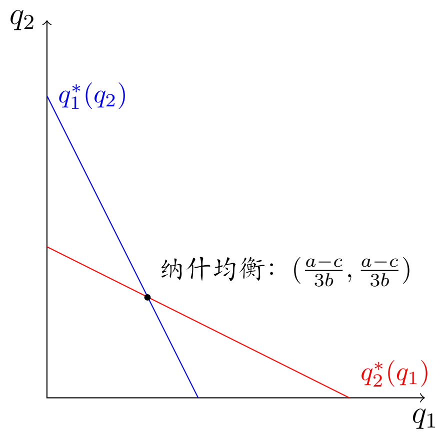
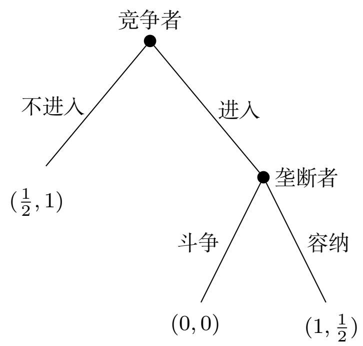


图 17.4: 古诺模型的纳什均衡

17.2 完全信息动态博弈

纳什均衡看起来非常合理，但实际上也有不太准确的时候。我们考虑下面这个例子：一个垄断者垄断一个市场，一个潜在的竞争者考虑是否进入市场。若竞争者放弃竞争（不进入），双方的支付为 $(\frac{1}{2}, 1)$，垄断者获得 1。若竞争者进入市场后，垄断者选择斗争或容纳。斗争带来的支付为 $(0, 0)$，容纳带来的支付为 $(1, \frac{1}{2})$。用博弈树表示：



17.3 不完全信息静态博弈

17.4 不完全信息动态博弈

17.5 Signaling Game

17.6 Reputation: Chain-Store Paradox

17.7 习题

Chapter 18

价格策略

在本章，我们会对具有市场势力的厂商定价行为进行回顾。

18.1 垄断定价：一般模型

考虑一个具有垄断力量的厂商，她面临的市场需求为 $p = a - bq$。她的成本函数为 $c(q)$。垄断力量使得该厂商可以“随意”选择价格和产量。

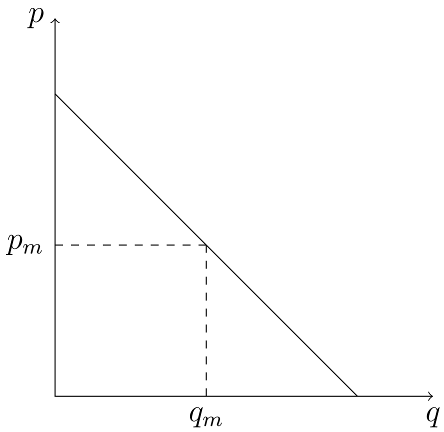


图 18.1: 市场需求: $p = a - bq$

假设该厂商选择产量 q_m，厂商为了把 q_m 全部卖出去，可以收取的最高价格是 p_m，因为任何 $p > p_m$ 都会导致消费者的需求量少于 q_m。并且注意到，给定产量 q_m，单价越高，厂商利润越大。因此，厂商面临的最优化问题为：

$$\begin{aligned} \max_{p,q} \quad & pq - c(q) \\ s.t. \quad & p = a - bq \end{aligned}$$

因此，该最优化问题化简为：

$$\max_q p(q)q - c(q) \implies p'(q)q + p(q) = c(q).$$

这就是我们熟悉的"边际收益"等于"边际成本"条件。

18.2 二级价格歧视：两类消费者模型

在现实生活中，我们常常可以看到同一个产品以不同的形式出售（如头等舱和经济舱、GTA 的豪华版与普通版）。本节试图对这种现象进行刻画，本节的模型可以参考 [7] 和 [4]。

考虑如下模型：市场上有两类消费者，一类是高需求 θ_H，另一类是低需求 θ_L。对于任意价格，消费者的效用函数是：$u(q) = \theta \cdot v(q) - p$。其中，$v'(q) \geq 0, v''(q) \leq 0$。$\theta_H, \theta_L$ 是消费者的私人信息，厂商不知道。厂商试图通过菜单：$(T_H, q_H), (T_L, q_L)$ 的方式最大化期望利润，其平均成本为 c。

因此，厂商面临的最优化问题为：

$$\begin{aligned}
\max_{p_H, p_L, T_H, T_L} \quad & \lambda(T_H - cq_H) + (1-\lambda)(T_L - cq_L) \\
s.t. \quad & \theta_H v(q_H) - T_H \geq 0 && \text{(PC1)} \\
& \theta_L v(q_L) - T_L \geq 0 && \text{(PC2)} \\
& \theta_H v(q_H) - T_H \geq \theta_H v(q_L) - T_L && \text{(IC1)} \\
& \theta_L v(q_L) - T_L \geq \theta_L v(q_H) - T_H && \text{(IC2)}
\end{aligned}$$

四个约束的经济学意义如下：

(i) PC1 和 PC2：两类消费者愿意接受提供给她们的菜单，即消费者若接受菜单：价格 T 和消费量 q，其效用至少和不买的效用是一样的。

(ii) IC1 和 IC2：两类消费者购买为自己设计的菜单是最优的。即高需求者不会主动选择 T_L, q_L，低需求者以此类推。

结果 18.1. 在最优菜单下：高需求者的约束中 PC1、IC1 至少有一个约束是紧约束（也就是等号成立）；低需求者的约束中 PC2、IC2 至少有一个约束是紧约束。

证明. 我们先观察高需求者。假设 PC1、IC1 都是松弛约束（不等号成立），则厂商总可以增加 T_H 来增加总利润；低需求者同理。 □

结果 18.2. 在最优菜单下，PC1 和 PC2 至少一个是紧约束。

证明. 假设在最优菜单下，四个约束严格成立，即：

$$\theta_H v(q_H) - T_H > 0 \tag{PC1}$$
$$\theta_L v(q_L) - T_L > 0 \tag{PC2}$$
$$\theta_H v(q_H) - T_H > \theta_H v(q_L) - T_L \tag{IC1}$$
$$\theta_L v(q_L) - T_L > \theta_L v(q_H) - T_H \tag{IC2}$$

厂商可以增加 T_H 和 T_L 相同单位，比如同时增加 1 元，这样 IC1 和 IC2 约束依旧成立，并且 PC1 和 PC2 会有至少一个约束先变为等号。因此，PC1 和 PC2 至少一个是紧约束。 □

结果 18.3. 在最优的菜单下：IC1 是紧约束，也就是 $\theta_H v(q_H) - T_H = \theta_H v(q_L) - T_L$。

证明. 在最优的菜单下，IC1 和 PC2 成立，则：

$$\begin{aligned}
&\theta_H v(q_H) - T_H \geq \theta_H v(q_L) - T_L && \text{(IC1)}\\
\Longrightarrow\ &\theta_H v(q_H) - T_H > \theta_L v(q_L) - T_L && (\theta_H \geq \theta_L)\\
\Longrightarrow\ &\theta_H v(q_H) - T_H \geq \theta_L v(q_L) - T_L \geq 0. && \text{(PC2)}
\end{aligned}$$

因此 PC1 并非紧约束，由结果18.1可得 IC1 为紧约束。 □

推论 18.1. 在最优菜单下：PC2 是紧约束。

证明. 由上一结果证明过程可知，若 PC1 是紧约束，则:

$$0 = \theta_H v(q_H) - T_H > \theta_L v(q_L) - T_L.$$

□

基于以上的观察，我们将厂商的问题化简为：

$$\begin{aligned}
\max_{p_H, p_L, T_H, T_L} \quad & \lambda(T_H - cq_H) + (1-\lambda)(T_L - cq_L) \\
s.t. \quad & \theta_L v(q_L) - T_L = 0 && \text{(PC2)}\\
& \theta_H v(q_H) - T_H = \theta_H v(q_L) - T_L && \text{(IC1)}
\end{aligned}$$

最优解为：

$$\theta_H v'(q_H^*) = c, \quad \theta_L v'(q_L^*) = \frac{c}{1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\theta_H - \theta_L}{\theta_L}}.$$

18.3 习题

习题 1 (具有承诺力的两期垄断者)**.** 考虑如下垄断定价问题：一个垄断厂商需要在 $t=1,2$ 两个阶段定价：p_1,p_2。市场有大量买者 N，买者对产品的效用为：$v-p$。v 是买者的私人信息，但是垄断厂商认为对于每一个买家，其价值 v 服从均匀分布，也就是：$v\sim U(\underline{v}_1,\bar{v}_1)$。该厂商具有承诺力，即：厂商承诺出价 p_1,p_2，则在第一阶段和第二阶段的价格就是 p_1 和 p_2。试求厂商的最优价格 p_1^*,p_2^*。

习题 2 (缺乏承诺力的两期垄断者)**.** 考虑如下垄断定价问题：一个垄断厂商需要在 $t=1,2$ 两个阶段定价：p_1,p_2。市场有大量买者 N，买者对产品的效用为：$v-p$。v 是买者的私人信息，但是垄断厂商认为对于每一个买家，其价值 v 服从均匀分布，也就是：$v\sim U(\underline{v}_1,\bar{v}_1)$。该厂商缺乏承诺力，即：厂商承诺出价 p_1,p_2，但消费者不相信。试求厂商的最优价格 p_1^*,p_2^*。

习题 3 (甄别劳动力)**.** 假设你是一名公司 HR 负责招聘工作。市面上有两类劳动者，一类是高技能 θ_H，一类是低技能 θ_L，劳动者的生产函数为：$f(\theta,l)=\theta l$，l 是工作量，高技能劳动者占比为 λ。劳动者效用函数为：$u(\theta,w,l)=\theta w-\sqrt{l}$，$w$ 是工资。设产品的价格为 1。尝试设计最优的合同：$\{(w_H,l_H),(w_L,l_L)\}$。

Chapter 19

逆向选择与道德风险：保险市场

本章的参考文献是 [5]。

19.1 保险市场的逆向选择

19.2 保险市场的道德风险

19.3 习题

Chapter 20

冯诺依曼 · 摩根斯坦定理

我们希望用本章让大家理解为什么可以用 $\sum_a u(a)p(a)$ 来表示我们对于不确定性事件的偏好。本章的参考文献是 [3]。我们在日常生活中会面临很多不确定性，但是在这些偏好中我们应该如何做出选择？我们在这一节解决这个问题。我们给出一个简单的例子辅助大家理解我们在这一章在做的事。考虑以下两件事：

- 事件 A：明天下雨的概率是 30%，不下雨的概率是 70%;
- 事件 B：明天下雨的概率是 50%，不下雨的概率是 50%。

如果决策者本身就不喜欢下雨，那么在这两件事中，她更喜欢哪件事呢？[1]直觉上来讲她会更喜欢事件 A。换句话讲，如果下雨给她带来的支付是 -1，不下雨给她带来的支付是 1，那么我们可以猜测事件 A 给和 B 决策者带来的（期望）支付是：

$$EU_A = 0.3 * (-1) + 0.7 * 1 = 0.4$$
$$EU_B = 0.5 * (-1) + 0.5 * 1 = 0$$

但现在问题来了，为什么这两个事件的期望效用不能用类似于：

$$EU_A = 0.3^{(-1)} + 0.7^1 = 0.4$$
$$EU_B = 0.5^{(-1)} + 0.5^1 = 2.5$$

来表示呢?我们在这一小节要解决的就是这个问题:期望效用总是可以表示为:$\sum_{x\in X} p(x)u(x)$ 的形式。在证明这件事之前，我们要先引入彩票 (lottery) 这个概念。

定义 2 (彩票集合)**.** 考虑有限集合 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$，则彩票集合为：

$$C(X) = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

[1]也就是把事件对应的效用放到对应概率的指数位置。

因此彩票集合中的任何一个元素都对应集合 X 所有元素的一个概率。

注 1 (彩票集合的一个特征)**.** 彩票集合的一个特征是其凸性（convexity）。也就是任意 $p, q \in C(X)$ 和任意 $\alpha \in (0,1)$，我们有：

$$\alpha p + (1-\alpha)q = \Big(\alpha p_1 + (1-\alpha)q_1, \ldots, \alpha p_n + (1-\alpha)q_n\Big) \in C(X)$$

我们将 $\alpha p + (1-\alpha)q$ 简记为 $p\alpha q$。

定理 20.1 (冯诺依曼和摩根斯坦定理)**.** 在彩票集合 $C(X)$ 上的偏好 $\succsim$ 满足 vNM 公理当且仅当存在一个效用函数：$u : X \to \mathbb{R}$ 代表这个偏好 $\succsim$。其中，vNM 公理为：

(i) 理性偏好：$\succsim$ 是完备的、传递的；

(ii) 独立性偏好：任意 $p, q, r \in C(X)$ 和 $\alpha \in (0,1)$，$p \succsim q$ 当且仅当 $p\alpha r \succsim q\alpha r$;

(iii) 连续性偏好：对于任意 $p, q, r \in C(X)$ 满足 $p \succ q \succ r$，则存在 $\alpha, \beta \in (0,1)$ 使得 $p\alpha r \succ q \succ p\beta r$。

此外，效用函数 $u : X \to \mathbb{R}$ 代表偏好 $\succsim$ 的意思是：对于任意 $p, q \in C(X)$

$$p \succsim q \ \text{ 当且仅当 } \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i)$$

证明. 我们不证明该定理，但感兴趣的读者可以在 [2] 中找到该定理的证明。 □

20.1 习题

参考文献

[1] Robert Gibbons. *A Primer In Game Theory*. Pearson, 1992.

[2] David Kreps. *Notes on the Theory of Choice*. Westview press, 1988.

[3] Ariel Rubinstein. *Lecture Notes in Microeconomic Theory*. Princeton University Press, 2005.

[4] Jean Tirole. *The Theory of Industrial Organization*. MIT Press, 1988.

[5] Christopher Snyder Walter Nicholson. *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions*. Cengage Learning, 2017.

[6] 张维迎. 博弈论与信息经济学. 上海人民出版社, 2004.

[7] 田国强. 高级微观经济学. 中国人民大学出版社, 2016.