简单博弈论

揭开博弈论的神秘面纱

作者：简单博弈论小组

有一天我们都会死去，追求智慧的道路还会有人在走着。死掉以后的事我看不到。但在我活着的时候，想到这件事，心里就很高兴。——王小波

前言

本书面向的读者是对经济学感兴趣的读者（不一定必须是经济学学生），因此在写作的过程中我们避免使用术语，仅仅在需要时循序渐进地引入。本书虽然叫博弈论，但我们为大家介绍了许多精美的经济学模型：寡头市场产量竞争模型、区别定价问题、拍卖等经典的经济学模型。

本书避免了“mathturbation（滥用数学）”，将主要内容的数学难度控制在导数。当然，这并非一件容易的事。例如，拍卖理论经常用到微分方程，区别定价问题有时需要用到最优控制论。我们也避免了使用这些高难度的数学知识，而是使用简单的微积分。

本书的主角是陈清扬和王二，这两位角色是王小波的小说《黄金时代》的主角。选择这二位主角在本书中，是为了纪念王小波，这位我们心中的英雄。

目录

第 1 章 一个简短的介绍

内容提要

- ❑ 博弈论：神仙打架之地
- ❑ 何为博弈：经济学家们做的是什么
- ❑ 博弈的要素
- ❑ 四种博弈模型

1.1 博弈论：神仙打架之地

1928 年一位刚取得授课资格的柏林大学 (University of Berlin) 的青年教师冯诺依曼（Von Neumann）发表了一篇他或许永远想不到会改变一门学科命运的论文《战略的游戏之理论》(On the Theory of Games of Strategy)，从这篇论文开始博弈论从一个个零散的问题变成了一门完整的学科。而这一年提出纳什均衡的人约翰纳什（John Nash）刚出生，和约翰纳什一起拿诺奖的莱因哈德泽尔腾 (Reinhard Selten) 还要等两年后才会来到这个世界，另一位共享诺奖的得主约翰海萨尼 (John Harsanyi) 在匈牙利念小学，聆听着前辈冯诺依曼的在学术界的一个个传奇故事……

1950 年 22 岁的约翰纳什以一篇 28 页的论文拿到了普林斯顿大学的博士学位[1]，在他的这篇博士论文里，他证明了有限参与人的博弈存在纳什均衡。约翰纳什是一位传奇的人，十九岁从卡耐基梅隆大学本科毕业申请博士时，他的推荐人卡耐基梅隆大学的数学教授理查德杜夫林 (Richard Duffin) 只写了一句话

> 他是个天才。
>
> 原文如下：This is to recommend Mr.John F. Nash, Jr. who has applied for entrance to the graduate college at Princeton. Mr. Nash is nineteen years old and is graduating from Carnegie Tech in June. He is a mathematical genius.

电影《美丽心灵》以约翰纳什的传奇人生为主线，向大家展示了这位神秘数学家的一生：他是一位伟大的数学家，也是一位与病魔抗争的精神病人。他二十九岁确诊精神分裂症，终其一生与之抗争。但每个人的成功之路都并不简单，当约翰纳什 (John Nash) 把自己博士论文的想法讲给冯诺依曼 (Von-Neumann) 时，冯诺依曼说出了有名的那句“（我不知道你在高兴啥）这是显而易见的，你懂吗？这就是不动点定理。”[2]但冯诺依曼或许不会想到，纳什均衡这个概念会在几十年后熠熠生辉——诺贝尔经济学奖[3]颁发给经济学理论领域的奖项都与博弈论有着千丝万缕的联系。

---

[1]在普林斯顿大学的官网上，感兴趣的读者依旧能看到他的博士论文：https://library.princeton.edu/special-collections/sites/default/files/Non-Cooperative_Games_Nash.pdf

[2]或许观看原文更有感觉：That’s trivial, you know. That’s just a fixed-point-theorem.

[3]严谨地说应该是：瑞典中央银行纪念阿尔弗雷德 · 诺贝尔经济学奖。

- 1994 年诺贝尔经济学奖颁发给了约翰纳什（John Nash）、莱茵哈德泽尔腾（Reinhard Selten）、约翰海萨尼（John Harsanyi），这三位大师就是博弈论的奠基人，我们在本书中会依次介绍这三位大师的杰作。
- 1996 年的诺贝尔经济奖颁发给了詹姆斯莫里斯（James Mirrlees）和威廉维克里（William Vickrey），前者在信息经济学上做出了重要贡献，后者的成名之作即为拍卖理论，拍卖理论是博弈论成功统治的一个领域，因为拍卖过程中常常涉及到竞标者战略性地提交竞标价格。竞标价格提交地太高固然可以增加竞标成功的几率，但是会减少制胜后所得的收益，反之竞标价格太低导致的问题也同理。
- 2001 年的诺贝尔经济学奖颁发给了乔治阿克洛夫 (George Akerlof)、迈克尔斯宾赛 (Michael Spence)、约瑟夫斯蒂格利茨 (Joseph Stigliz)，这三位大牛的主要贡献在于信息经济学，其中迈克尔斯宾赛的成名之作就是 “劳动力市场的信号传递”，这篇论文中斯宾赛用博弈论来解释求职者利用学历来传递自己高能力的信号，斯宾塞的模型被我们称为信号博弈 (Signaling Game)。
- 2005 年的诺贝尔经济学奖颁发给了罗伯特奥曼 (Robert Aumann) 和托马斯谢林（Thomas Schelling），原因是二者对博弈论的突出贡献。
- 2007 年的诺贝尔经济奖[4]颁发给了里奥尼德赫微克兹（Leonid Hurwicz）、埃里克马斯金（Eric Maskin）、罗杰迈尔森（Roger Myerson），原因在于他们对机制设计理论的突出贡献，而机制设计背后的理论恰好就是博弈论。举一个简单的例子，航空公司经常会提供头等舱和经济舱的选项，原因在于这两个选项可以用来区分消费者——愿意支付高价的消费者和不愿支付高价的消费者。但如何定价才是最优的？这就是一个机制设计问题，我们将会在第4章详细讨论这个模型。
- 2014 年的诺贝尔经济学奖颁发给了让梯若尔（Jean Tirole），原因在于他对市场力量和监管的分析。产业组织理论中必备的分析手段就是就是博弈论，而他本人也是 2007 年诺奖得主埃里克马斯金（Eric Maskin）的弟子。关于产业组织理论，有一个有趣的例子：垄断会造成什么后果，政府应该做些什么来反垄断？一个看似矛盾的结论是：面对垄断者，政府不但不能对其征税，反而要对其进行补贴。其原因则在于垄断者为了将其产品的价格维持在一个较高的水平，往往会减少商品的生产。因此，为了刺激垄断者的产品供给，政府机构往往需要对其进行补贴。
- 2020 年的诺贝尔经济学奖颁发给了保罗米尔格罗姆（Paul Milgrom）和罗伯特威尔逊（Robert Wilson），原因在于他们对拍卖理论的贡献，博弈论是拍卖理论的重要基石。拍卖理论中一个有趣的结论是：利润一样原理。无论卖家如何设计拍卖的规则，它最后可以赚到的钱都一样多。

经济学理论还有许多其他的研究领域，但是这些领域或多或少有一个相似点：避免不了对参与主体的互动做分析，一旦涉及到分析参与主体的分析，那我们就避免不了引入博弈论。

[4]值得一提的是，三位诺奖得主桃李满天下，他们培养了许多当今中国经济学界的领军人物。比如上海财经大学的田国强教授的博士生导师就是赫微克兹，而埃里克马斯金先生的弟子包括钱颖一教授、白重恩教授、李稻葵教授、许成钢教授……

大家也可以发现，在前几十年博弈论拿诺贝尔经济学奖的频率很高，但现在已经越来越低了。似乎很多人已经认为经济学理论，抑或是所谓的微观经济理论（Microeconomic Theory）已经行将就木了，这或许是真的，或许是假的。真的一点在于，现在每年毕业的经济学博士生做微观经济理论的人越来越少；假的一点在于博弈论正在横跨经济学的领域越来越频繁地出现在其他学科：政治、生物、计算机等领域中⋯⋯这让我想到，**虽然我们已经不再研究一元二次方程的求根公式，但它已经是我们每个人都熟知的东西**。我想博弈论或许就是这样一门学科，虽然越来越少的人会去研究这门学科，但是他最后会变成我们每个人都懂的学科。

1.2 何为博弈：经济学家们做的是什么

博弈实际上就是一个游戏，有游戏玩家、有规则、有奖励机制。玩家在规则的制约下战略性地互动。比如在吃鸡（和平精英）里，游戏玩家通过拣武器、战略性地封烟、扔闪光弹、使用呼救器、自救、歼灭对手来赢得比赛。而这些游戏的要素在经济学家看来可以用三个词来表达：

- 参与人：游戏玩家；
- 行动：拣武器、战略性地封烟、扔闪光弹、使用呼救器、自救、歼灭对手；
- 支付：赢得比赛/输掉比赛。

读者朋友们或许会好奇，经济学家研究博弈论可以用来干什么？可不可以用来赚钱？我认为出色的博弈论学者是可以通过自己的学识来赚到钱的。但经济学家一般不这么干的原因可能有以下几点：经济学家是风险厌恶者、经济学家爱面子不愿意被贴上赌徒或者贪财的标签、经济学家真心热爱学术不为金钱折腰。那么经济学家研究博弈论是在研究什么？他们做的事可以概括为两点：

- 对玩家战略性互动的结果提供一个预测，对应到吃鸡的这个例子就是**谁赢得比赛**;
- 如果预测出来玩家的互动有多个结果，能不能制定一个标准，让我们来比较结果的优劣并且实现改进[5]，对应到吃鸡的例子就是**让谁赢比赛更好，是平局好，还是让谁赢更好**。

我们用下面这个例子，来解释经济学家做的第一件事：对玩家战略性互动的结果提供一个预测。设想一个场景，陈清扬和王二去抢银行被警察抓住。王二和陈清扬被放在公安局里单独审问，他们被告知：如果两个人都抵赖的话，因为证据不足两个人各判一年；如果一方招供但另一方抵赖的话，则招供方直接无罪释放（坦白从宽嘛）而抵赖方判三年；如果双方都招供，那么罪大恶极（或许是警察叔叔意外发现了两人是在逃恶性杀人犯），双方都判两年。看文字比较麻烦，我们直接将这个博弈列成下面这张表，红色的字代表王二的判的年数，黑色的字代表陈清扬判的年数。

为了分析这个游戏，我们先从陈清扬的角度考虑问题：

- 如果王二招供，那我陈清扬一定招供，因为我不招供判两年，抵赖判三年；
- 如果王二抵赖，那我陈清扬也会招供，因为招供直接释放，抵赖判一年。

[5]我们将在第3.4节讨论这一点。

		陈清扬	
		招供	抵赖
王二	招供	$(-2, -2)$	$(0, -3)$
	抵赖	$(-3, 0)$	$(-1, -1)$

表 1.1: 囚徒困境

因此，无论王二怎么选择，陈清扬一定会招供。从王二的角度来考虑问题，我们也会得到同样的答案——无论陈清扬如何选择，王二也一定会招供。因此，我们预测最后的结果是陈清扬和王二都会招供。

通常，经济学家希望能够将一个结果抽象化，得到更加普适的结论，因此这要求我们对博弈下一个定义。再回过头来看陈清扬和王二的囚徒困境问题，我们发现这个博弈有以下几个要素：

- 犯罪嫌疑人：陈清扬和王二；
- 行动：每一个参与人可以选择的行动是招供或者抵赖；
- 后果：当陈清扬和王二选择行动（招供或者抵赖）后，警察局宣布每个人获刑多少年。因此，一共有四种后果，并且这四种后果和每一个参与人的行动是一一对应的。

经济学家们为了交流的方便，通常会对具体的概念定义，博弈论的这几个要素也不例外。他们的官方说法如下。

笔记 [博弈论的官方说法] 我们将博弈论的参加者叫做：参与人 (Player)，我们管参与人可以做的选择叫做行动 (Action)，我们管参与人的行动组合造成的结果叫支付（Payoff）。

1.3 博弈的要素

但美中不足的是，上述的几个要素还不足以刻画所有的博弈。我们再试着设想另一个场景，陈清扬和王二去抢银行被抓了，然后二人被抓起来审问，判刑的规则和刚才一样，但是现在陈清扬先行动（也就是她先选择招供与否），然后王二再行动。我们用下面的这个流程图来表达这个博弈。

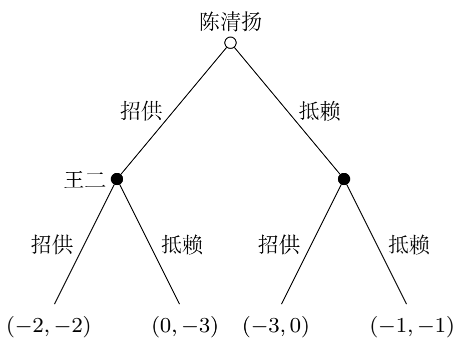

图 1.1: 陈清扬先行动的囚徒困境

我们怎么描述这个博弈呢？显然这个博弈和刚才的博弈不一样。我们看一看如果用刚才

的那几个要素来描述这个博弈是否能行得通？

- 参与人：（犯罪嫌疑人）陈清扬和（犯罪嫌疑人）王二，显然这个描述是合理的；
- 行动：每一个参与人可以选择的行动是招供或者抵赖，这一点是合理的；
- 后果：一共有四种后果，并且这四种后果和每一个参与人的行动是一一对应的，这个描述也是合理的。

但是以上要素没办法反应这个博弈的一个关键特征：**陈清扬先行动**。为了反应这一点，我们需要引入战略这个概念，我们有时也管战略叫策略。

定义 1.1 (战略)

一个参与人的战略是她在博弈开始前的全盘规划，即参与人打算在什么时间点干什么。♣

那么，有了战略的概念，我们就可以刻画这个博弈的动态性了，也就是陈清扬先行动的特征，王二的战略是：

- 在观察到陈清扬招供后，选择招供或者抵赖；
- 在观察到陈清扬抵赖后，选择招供或者抵赖。

笔记 在静态的博弈中，也就是第一个例子，陈清扬和王二同时选择行动的例子，战略和行动是一回事。只有在这种一前一后行动，具有动态性特征的博弈中，战略和行动的区分才有意义。

我们已经给出了两个博弈的例子，我们对行动和策略做出了模糊的区分，我们希望在这里对策略与行动做出精确的刻画。

定义 1.2 (行动与策略)

在一个博弈中，我们这样区分行动与策略：

- 行动：行动是一个参与人在任何一个时间点上，所做出的一个选择；
- 策略：策略是一个参与人事前（博弈开始前）考虑到任何时间点可能会发生的任何情况，做出的一个全盘规划。

♣

笔记 [对比战略] 因此，在我们介绍的这两个陈清扬和王二抢银行博弈中，王二的行动都是一样的：招供或者抵赖。但是王二在两个例子中的战略是不一样的。

- 第一个例子中，王二在选择坦白或者抵赖时，不知道陈清扬的选择。因此，王二的策略就是坦白或者抵赖；
- 第二个例子中，王二在选择坦白或者抵赖时，知道陈清扬的选择。因此王二的策略是："若陈清扬选择 xxx，我就选择 xxx"。

1.4 四种博弈的模型

在接下来的几章中，我会介绍四种基本的博弈模型。她们包括：完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、不完全信息静态博弈、不完全信息动态博弈。

其中，完全信息是指：所有参与人都知道什么样的行动组合会导致什么样的支付，因此

不完全信息就是指有的参与人不知道某个行动的组合给对手带来的支付[6]。静态和动态的区别在于：参与人在某一个时间点选择行动时，是否知道对手此前的选择，若知道则为动态博弈，若不知道则为静态博弈。

例如，我们在第1.2节中举的两个例子，第一个例子就是完全信息静态博弈，因为陈清扬和王二都知道对方的支付，第二个例子是完全信息动态博弈，因为王二在选择行动时，知道陈清扬的选择。

我们再举一个不完全信息静态博弈的例子：考虑陈清扬和王二在参加某项拍卖活动，这个拍卖品对陈清扬和王二的价值是 v_c, v_w，而如果陈清扬和王二出价 b_c, b_w 买下拍卖品给她们各自带来的支付则是 $v_c - b_c, v_w - b_w$。这个博弈就是不完全信息静态博弈，不完全信息体现在陈清扬不知道该拍卖品对王二的价值 v_w，同时王二也不知道该拍卖品对陈清扬的价值 v_c，静态性则体现在陈清扬和王二在选择出价 b_c, b_w 时不知道对方的出价 b_w, b_c。

最后，我们举一个不完全信息动态博弈的例子。假设陈清扬和王二相恋已久，有一天王二向陈清扬表白，陈清扬可以选择接受也可以选择拒绝。这个博弈就是不完全信息动态博弈，原因在于陈清扬不知道王二是不是渣男，如果王二是渣男那陈清扬接受了以后王二可能玩玩就腻了，如果王二不花心二人才能天长地久，因此陈清扬不知道如果她接受王二的表白给王二带来的支付。该博弈的是动态的，原因在于陈清扬可以观测到王二是否选择表白。

[6]一个简单的例子就是拍卖，竞标者在提交自己的竞价时，不知道这个物品对对手的价值。

第 2 章 完全信息静态博弈

内容提要

- ❏ 纳什均衡：犯罪嫌疑人陈清扬和王二
- ❏ 古诺模型
- ❏ 更多模型和混合均衡
- ❏ 纳什均衡存在性

这一章，我们介绍博弈论中最简单的模型：完全信息静态博弈。这一类博弈有两个特征分别是完全信息和静态，我们再回顾这两个概念：

- 完全信息：所有行动组合[1]导致的每个人的支付是所有参与人都知道的；
- 静态博弈：每一位参与人在行动的时候都不知道对手选择的行动。

笔记 [完全信息静态博弈的战略与行动] 在第一章中，我们指出了行动和策略并不相同。但是在完全信息静态博弈中，行动和策略是相同的。原因在于，静态博弈中参与人的策略是直接选择某行动，而并非“当对手选择 xxx，我选择 xxx”。这一点或许难以理解，感到难以理解的读者可以再回过头去看一下第一章的内容。

2.1 纳什均衡：犯罪嫌疑人陈清扬和王二

直觉是经济学家最重要的一个品质，就像《美丽心灵》中的约翰纳什看着满屏幕的数字就破解了密码一样（当然我相信这不太可能，即使瞪眼瞪出来密码也不太可能几分钟就能瞪出来）。经济学家的直觉往往有两种用武之地：

- 写下一个模型就可以猜出来模型的解是什么，猜出来这个解其实有很多策略，比如通过参与人的对称性、支付函数的单调性、参与人行动的先后……；
- 解出来一个具体的解，但是能猜出来这个解的意义是什么，是一个最小值还是一个最大值，还是一个不动点[2]？

在第1.2这一小节，我们曾经考察过陈清扬和王二抢银行后被判刑的博弈，我们对那个博弈的结果给出的预测是 (招供，招供)，我们可以合理地猜测这个解就是一个不动点，原因在于：王二选择招招供 $\Longrightarrow$ 陈清扬也会选择招供 $\Longrightarrow$ 王二也会选择招供，因此王二选择招供带来的一系列后果是稳定的，即王二选择招供导致陈清扬选择的行动 A，陈清扬选择 A 导致王二不会选择其他行动 (非招供)。从数学的角度来讲，假设给定王二选择 x，陈清扬的最优选择是 $f(x)$；同时给定陈清扬的选择 y，王二的最优反应是 $g(y)$。那么如果 (x,y) 构成一个稳定的均衡的话，我们猜测 x,y 会满足以下的条件：

---

[1]行动组合是指所有参与人行动的组合，我们一般写 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$，如果有 N 位参与人的话，并且参与人 i 选择的是 a_i。

[2]不动点的意思：若一个函数讲某点映射到该点本身，则该点为不动点。其数学定义为：若 $f(x)=x$ 则 x 是不动点。

$$x = g(f(x))^{3} \text{ 以及 } y = f(x)$$

经济学家对这样的均衡非常感兴趣，因为这种均衡是稳定的，一旦达到则会趋于稳定，因为双方都实现了互为最优，而纳什均衡就具有这样的特点：一旦均衡达到，没有一个参与人会选择其他的策略来背离这个均衡。我们再回过头来看我们在第1.2这一小节考察的例子。我们将证明，这个战略组合就是符合我们对均衡的直觉。

		陈清扬	
		招供	抵赖
王二	招供	$(\underline{-2}, \underline{-2})$	$(\underline{0}, -3)$
	抵赖	$(-3, \underline{0})$	$(-1, -1)$

表 2.1: 囚徒困境

我们先站在陈清扬的角度考虑问题，我们可以发现：

- 如果王二选择招供，那么陈清扬的最优选择是选择招供，因为陈清扬如果招供只判两年，但是选择抵赖判三年；
- 如果王二选择抵赖，那么陈清扬的最优选择是招供，因为陈清扬招供就无罪释放，但是抵赖判一年年。

对王二进行同样的分析，我们可以发现无论陈清扬选择招供还是抵赖，王二的最优选择都是招供。我们用下划线“__”来表示当对手选择某策略时，我的最优策略。我们惊讶地发现，当二人都选择招供时，策略组合 (招供，招供) 是互为最优的。因此，一旦这个均衡达到，双方都没有动机去改变自己的策略，这个均衡我们称之为纳什均衡。

笔记 [检查陈清扬没有背离的动机] 当王二选择招供时，陈清扬一定会选择招供，因为招供判两年，抵赖判三年。

笔记 [为何是囚徒困境] 为何这个博弈被称为囚徒困境，原因在于有一个策略组合能给双方带来更好的支付：(抵赖，抵赖)，因此这个策略组合下，两位犯罪嫌疑人都只判一年。但纳什均衡告诉大家的是大家都会招供，因此每个人都会坐两年牢。

笔记 [不动点的直觉] 在本节的开头，我们曾经猜测 (招供，招供) 是不动点，这里我们可以验证这个行动组合就是不动点。当王二选择招供 (x) 时，陈清扬选择招供 ($f(x)$) 是最优的；当陈清扬选择招供 ($f(x)$) 时，王二选择招供 ($g(f(x))$) 是最优的，可以发现 $x = g(f(x))$。这一点发现正好可以用来证明纳什均衡的存在性。

基于这个发现，我们如何将囚徒困境的模型给抽象出来？显然，从参与人、战略、支付三个维度进行：

- 参与人可以从 2 位推广到 n 位，即参与人的集合为 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$；
- 策略可以从 2 个推广到 k 个，即参与人 i 的策略集合为 $S_i = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$；

[3]这里 $g(f(x))$ 表示复合函数，意思是：给我一个 x，我就返回一个 $g(f(x))$，数学上的意思是：给定定义域上的 x，则该复合函数将 x 映射到 $g(f(x))$。

- 支付可以写成一般的形式，即参与人 i 的支付为 $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$，即所有人参与人的策略决定了参与人 i 的支付。

下面，我们给出纳什均衡的定义。

定义 2.1 (纳什均衡)

纳什均衡是参与人的策略组合 $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$，其中 s_i^* 是参与人 i 的策略。一旦博弈达到纳什均衡，则没有任何一位参与人有动机选择其他策略以背离纳什均衡，换言之：

$$u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*), \quad \forall i \in I \text{ 和} s_i \in S_i.$$

♣

笔记 [求解纳什均衡] 在求解囚徒困境的过程中，我们已经用到了一个求解纳什均衡的方法：划线法。即，给定对方的一个战略，在我的最优战略对应的支付下画一个下划线。如果一个单元格有两条下划线，那个这个支付对应的战略就构成了纳什均衡。

2.2 更多模型与混合均衡

纳什均衡一定存在吗？不一定。请大家考察下面这个例子：有一天陈清扬和王二决定要买一条狗，陈清扬喜欢杜宾，王二喜欢哈士奇，他们决定采取公平的方式来做决定：石头剪子布。

		陈清扬		
		石头	剪子	布
王二	石头	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$
	剪子	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,0)$
	布	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

表 2.2: 石头剪子布

我们来分析一下双方的最优策略，显然石头胜剪子，剪子胜布，布胜石头。显然，这个游戏没有最优策略。为了巩固我们求解纳什均衡的方法，我们依旧采取画下划线的方式帮助读者确定给定对手策略时，自己的最优策略。

		陈清扬		
		石头	剪子	布
王二	石头	$(0,0)$	$(\underline{1},0)$	$(0,\underline{1})$
	剪子	$(0,\underline{1})$	$(0,0)$	$(\underline{1},0)$
	布	$(\underline{1},0)$	$(0,\underline{1})$	$(0,0)$

表 2.3: 石头剪子布：最优策略

显然，这个博弈没有纳什均衡。那么，能否把我们纳什均衡的概念推广一下？回顾我们在本章开头所说的：在完全信息静态博弈中，行动和策略就是一样的。但这句话并不完善，因

为我们隐形地假设了参与人可以选择的策略是“以概率为 1 地选择某个行动”。但实际上，我们也可以使用这样的战略：以三分之一的概率选择石头、剪子、布，而这种策略就被称之为混合策略。

定义 2.2 (混合策略)

混合策略就是参与人以以某种概率来选择某个行动。严格来讲，假设参与人 i 的行动集合为 $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$，那么一个混合策略是一个概率分布 $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$，其中 p_j 是参与人 i 选择行动 a_j 的概率，并且 $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$。当某个 $p_j = 1$ 时，我们称该混合策略为纯策略。♣

笔记 [陈清扬的混合策略] 在引入了混合策略这个概念后，陈清扬可以选择的混合策略就是 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$，也就是以 $\frac{1}{3}$ 的概率选择石头、剪子和布。

引入了混合策略以后，纳什均衡的定义是否会有所改变呢？直觉上来讲不会，因为纳什均衡是一种大家都不会背离彼此策略组合的一种状态，因此混合策略均衡的定义应该和我们此前对纳什均衡的定义大差不差。

定义 2.3 (混合策略均衡)

纳什均衡是参与人的策略组合 $\Delta^* = (\Delta_1^*, \Delta_2^*, \ldots, \Delta_n^*)$，其中 Δ_i^* 是参与人 i 的混合策略。一旦博弈达到纳什均衡，则没有任何一位参与人有动机选择其他策略以背离纳什均衡，换言之：

$$u_i(\Delta_1^*, \Delta_2^*, \ldots, \Delta_n^*) \geq u_i(\Delta_1^*, \ldots, \Delta_{i-1}^*, \Delta_i, \Delta_{i+1}^*, \ldots, \Delta_n^*), \quad \forall i \in I \text{ 和} \Delta_i \in \Delta(S_i).$$

♣

笔记 [对以上定义符号的注释] 请大家不要被这些符号吓到，Δ_i 呀、Δ_i^* 呀只是代表参与人 i 的一个混合策略，$\Delta(S_i)$ 只是代表参与人 i 所有的混合策略。举一个简单的例子，对于表2.3这个博弈来说，参与人陈清扬所有的混合策略可以表示为：

$$\Delta(S_{\text{陈清扬}}) = \{(p, q, 1-q-p) : p, q \in [0, 1]\}.$$

p 是陈清扬选择石头的概率，q 是陈清扬选择剪子的概率，$1-p-q$ 是陈清扬选择布的概率。

刚才我们说到陈清扬可以以 $\frac{1}{3}$ 的概率来选择石头、剪子或者布，合理猜测如果王二也选择这个策略，那么我们是否达到了混合策略均衡呢？显然是的。我们以陈清扬的视角来看待问题：若王二选择策略 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$，那么实际上任何混合策略都可以给陈清扬带来 $\frac{1}{3}$ 的支付。比如：

- $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$: 此时陈清扬的期望支付为 $\frac{1}{3}$;
- $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$：此时陈清扬的期望支付为 $\frac{1}{3}$。

那么这是否说明 $((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$ 和 $((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}))$ 都是混合策略纳什均衡呢？第一个混合策略组合构成混合策略纳什均衡，但第二个不是。原因在于，当陈清扬的混合策略是 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ 时，王二的最优策略应为 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，即双方并非互为最优。

细心的读者或许已经发现，我们已经引入了两个均衡的定义，其中一个是纳什均衡，第二

个是混合战略均衡。实际上两个概念都是纳什均衡，我们把定义2.1称为**纯策略纳什均衡**，将定义2.2称为**混合战略纳什均衡**，有时我们也叫它混合战略均衡。我们将纯战略纳什均衡和混合战略纳什均衡统称为纳什均衡。

笔记 [混合策略纳什均衡的暗示] 在陈清扬-王二石头剪子布博弈中，我们已经发现了一个混合策略均衡是双方均以 $\frac{1}{3}$ 的概率来选择石头、剪子、布。我们分析陈清扬的行为，给定王二的混合策略 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，即然陈清扬决定以严格正的概率分配到每一个行动（石头、剪子、布）中，这说明：给定王二的混合策略，陈清扬的每一个纯策略带给她的支付都一样。换一个逻辑想，如果某一个纯策略能给陈清扬带来更高的支付，那么陈清扬势必会再那个纯策略上赋予更高的权重。

我们将以上的发现归结为一下的命题。

命题 2.1 (严格混合策略均衡的暗示)

假设 $(\Delta_1^*,\Delta_2^*,\ldots,\Delta_n^*)$ 是一个混合策略均衡。那么对于参与人 i 来讲，若参与人 i 的混合策略 Δ_i^* 是参与人 i 以正的概率 $p(s_m^i),p(s_n^i)>0$ 选择纯战略 $s_m^i,s_n^i\in S_i$，那么

$$EU(\Delta_1^*,\Delta_2^*,\ldots,\Delta_{i-1}^*,s_m^i,\Delta_{i+1}^*,\ldots,\Delta_n^*)=EU(\Delta_1^*,\Delta_2^*,\ldots,\Delta_{i-1}^*,s_n^i,\Delta_{i+1}^*,\ldots,\Delta_n^*)$$

证明 证明参见课后习题。

以上的石头剪子布博弈的分析表明：有的博弈中只有混合策略均衡，但是没有纯策略纳什均衡。那么有没有博弈既存在纯策略纳什均衡又存在混合策略均衡呢？答案是：yes! 请参考以下这个经典的例子。假设陈清扬和王二决定下班以后去约会，但是他们那个年代都没有手机，也没有即时通讯设备。因此只能下班后直接前往约会的场地，但是悲催的是他们事先并没有确定到底是：看拳击还是看芭蕾。王二更喜欢看拳击，陈清扬泽更喜欢看芭蕾。但是两个人相比于走错地方，更喜欢呆在一起。我们画出该博弈。

		陈清扬	
		拳击	芭蕾
王二	拳击	$(10,7)$	$(0,0)$
	芭蕾	$(0,0)$	$(7,10)$

表 2.4: 性别战：芭蕾？拳击？

我们先来分析纯战略纳什均衡，我们先从陈清扬的视角分析：如果王二选择拳击的话，我（陈清扬）最好选择拳击；如果王二选择芭蕾的话，我（陈清扬）最好选择芭蕾。从王二的视角分析逻辑类似。因此，我们发现最终的纯战略纳什均衡有两个：(拳击，拳击) 和 (芭蕾，芭蕾)。如何求解混合战略均衡？我来教大家。假设王二的混合战略是 $(p,1-p)$，陈清扬的混合战略是 $(q,1-q)$。根据命题2.2，给定对方的战略，自己的纯战略带来的支付应该一样。我们还是站在陈清扬的角度考虑问题，给定王二的混合战略 $(p,1-p)$，

$$\mathrm{EU}_{\text{陈清扬}}(\text{拳击})=\mathrm{EU}_{\text{陈清扬}}(\text{芭蕾})$$

陈清扬选择拳击的期望效用为：$7p$，陈清扬选择芭蕾的期望效用为 $10(1-p)$，令两个值相等，

我们得到 $p=\frac{10}{17}$。同理，我们可以算出 $q=\frac{7}{17}$。从直觉上来讲，这个数字是符合我们预期的，因为两位参与人是对称的，所以他们的混合策略应该具有某种对称性；此外双方都在自己更喜欢的项目上放更多的权重 $\frac{10}{17}$。因此，纳什均衡、混合战略均衡可以同时存在。

2.3 古诺模型

以上几个小节，我们介绍了一些经典的、简单的经济学模型来讲述不完全信息静态博弈。这里我们引入一个非常经典的，但也有一点难度的例子：古诺模型。

古诺模型是经济学中最经典的一个模型之一。这个模型研究的是这个东西：一个市场的需求[4]是 $p=a-bq$，因此如果知道产品的价格，那么我们就知道了产品的需求量；同理如果我们知道了产品的需求量，也就知道了产品的价格。该产品市场由两位厂商（不妨假设就是陈清扬和王二）同时供给。假设每位厂商同时选择产量 q_c, q_w，每个厂商生产某产品的单位成本[5]为 c。古诺模型问的问题是：这个模型的纳什均衡是什么？我们一步一步来分析该博弈。

- 参与人：该博弈有两位参与人，分别是陈清扬和王二；
- 行动：每一位厂商的行动是选择供给量，我们分别记为 q_c, q_w；
- 战略：该博弈是完全信息静态博弈，因此二位参与者的战略就是行动；
- 支付：这一点就比较有挑战性了，我们慢慢来。按照惯例，我们还是从陈清扬的角度去考虑问题。假设王二选择产量 q_w，我陈清扬如果选择供给 q_c，那么我的支付（也就是我的利润）为: 假设 p 为此时的产品价格

$$u_c(q_c,q_w)=\underbrace{pq_c}_{\text{收益}}-\underbrace{cq_c}_{\text{成本}}$$

  p 要怎么确定呢？注意到我们的市场需求为 $p=a-bq$，所以当王二供给 q_w，陈清扬供给 q_c 时，市场的价格为 $a-bq_c-bq_w$。因此，陈清扬的支付为：

$$u_c(q_c,q_w)=(a-bq_c-bq_w)q_c-cq_c$$

先不着急求解纳什均衡，我们先凭借直觉猜一猜最后的纳什均衡解会是什么样。

- 最后解的形式应该是 (q_c,q_w)，因为二者的战略都是选择产量 q；
- 纳什均衡解中，陈清扬和王二的产量应该是一样的，即 $q_c^*=q_w^*$。因为陈清扬和王二本质上是“对称的”，她们除了名字不一样，其他的全一样，比如成本、战略、面临的市场等；
- 纳什均衡解 q_c^*, q_w^* 应该是关于 c, b 递减的函数，因为成本 c 越高或者市场需求 b 越少陈清扬和王二应该供给地更少；同时是关于 a 地增函数，因为市场需求 a 越大，二人应该供给更多。

猜完后让我们试着求一下纳什均衡，让我们先回顾纳什均衡在这个博弈下应该如何定义：“该模型的纳什均衡应为陈清扬和王二选择的产量 (q_c^*, q_w^*)，并且一旦达到了这个产量组合，陈

[4]对经济学不熟悉的读者或许会疑惑这个市场需求是什么，它的意思是：如果市场对产品的需求量是 q，则该产品的单价为 $p=a-bq$；反之若某产品的单价为 p，则市场对该产品的需求量为 $\frac{a-p}{b}$。

[5]单位成本为 c 的意思是：若厂商生产 q 单位产品，则总成本为 cq。

清扬和王二都不会发现改变产量[6]是有利可图的。”我们的思路很简单：我们不可能同时分析二位参与人的决策，因此我们先假设王二供给 q_w 时，陈清扬供给多少是最优的；然后我们分析如果陈清扬供给 q_c 时，王二供给多少是最优的，或许会存在一个产量组合 (q_c^*, q_w^*) 使得两位参与人的供给互为最优。这样，一旦达到这个均衡以后，双方都不会背离彼此的产量选择了。

我们现在来从陈清扬的角度考虑问题，假设王二供给 q_w，陈清扬的最优供给为[7]：

$$u_c(q_c, q_w) = (a - bq_c - bq_w)q_c - cq_c \implies \frac{\partial u_c(q_c, q_w)}{\partial q_c} = 0 \iff q_c^* = \frac{a - bq_w - c}{2b}$$

从王二的角度考虑问题，我们会发现，当陈清扬供给 q_c 时，王二的最优供给为：

$$q_w^* = \frac{a - bq_c - c}{2b}$$

那么这个博弈的纳什均衡是什么？回想纳什均衡的定义：给定别人的战略自己的战略是最优的。因此，两个反应函数的交点就是纳什均衡了。

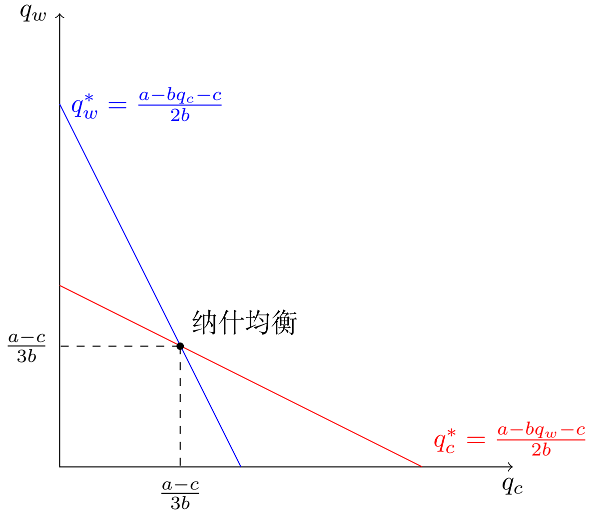

图 2.1: 古诺模型纳什均衡

可以发现，当 $(q_c^*, q_w^*) = (\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b})$ 时，给定王二的产量 $q_w^* = \frac{a-c}{3b}$，陈清扬的最优反应是 $q_c^* = (\frac{a-c}{3b})$，反之也同理。因此，我们求的了古诺模型的纳什均衡。

2.4 纳什均衡存在性

性别战的例子告诉我们，一个博弈可以同时存在纯战略纳什均衡和混合战略纳什均衡。我们可以猜想：

- 或许一个博弈有奇数个纳什均衡；
- 或许一个博弈至少有一个混合策略纳什均衡

我们的猜想非常棒，纳什或许也是这么想的，他在 1951 的论文《Non-cooperative Games》证

[6] 比如陈清扬不供给 q_c^* 而是供给其他的，或者王二改变他的供给。

[7] 这个函数在经济学上被称为反应函数 (Reaction Function)，意思很直白：这个函数说的就是你对对方战略的反应，对方供给多少，你供给多少是最优的。

明了大名鼎鼎的纳什均衡存在性定理（虽然冯诺依曼 doesn't give it a shit），我们纳什均衡存在性定理表达如下：

定理 2.1 (纳什均衡存在性定理)

一个有限参与人，并且有限纯策略的博弈中，存在一个（纯的或者混合的）纳什均衡。♡

在此前的猜想中，我们猜想纳什均衡实际上是一个不动点，因此我们将用角谷劲夫不动点定理 (Kakutani fixed point theorem) 去证明纳什均衡的存在性。

定理 2.2 (角谷劲夫不动点定理)

考虑非空、紧、凸集 $S \subset \mathbb{R}^n$，函数 $f: S \to 2^S$ 将 $s \in S$ 映射到 S 的一个子集。若 f 满足以下两个性质：

- f 有闭图像；
- 对于任意 $s \in S$, $f(s)$ 是非空、凸集。

则 f 有一个不动点 x^*：$x^* \in f(x^*)$。♡

我们逐个讨论角谷劲夫不动点定理的各个条件，然后利用角谷劲夫不动点定理证明纳什均衡存在性定理。感兴趣的读者可以在维基百科[8]看到角谷劲夫不动点定理的证明。

- 集合 S: 集合 S 是非空集、紧集和凸集，我们逐个解释这三个条件：
  - 非空集合：意思是 S 不是空集，也就是 S 至少有一个元素。用数学语言表达就是：$S \neq \varnothing$;
  - 紧集：意思是 S 是有界闭集。
    1. 有界的意思是集合 S 中任意两个点的距离都是有限的。用数学语言来讲意思是:$\exists B \in \mathbb{R}$，并且 $d(x, y) \leq B, \forall x, y \in S$。这里距离的定义是：

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

    2. 闭集是 S 包含边界，意思是任何集合 S 中的序列，其极限必须包含于集合 S 中。用数学语言来讲意思是：

$$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \in S,\ 则\ \lim_{n \to \infty} x_n \in S$$

  - 凸集：意思是 S 中任何两个点的连线仍然属于 S。用数学语言来表达是：

$$\forall \lambda \in (0, 1), x, y \in S,\ 我们有\ \lambda x + (1 - \lambda) y \in S$$

- $f: S \to 2^S$ 实际上是一个对应 (Correspondence，也叫作 Set-valued function)，意思是将一个元素映射到一个集合。这里 2^S 是 S 所有子集构成的集合[9]。
- 闭图像 (Closed graph)：任意两个序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$，若 $x_n \to x, y_n \to y, y_n \in f(x_n)$，则 $y \in f(x)$。

[8] Kaikutani fixed-point theorem: https://en.wikipedia.org/wiki/Kakutani_fixed-point_theorem

[9] 一个简单的例子：如果 $S = \{0, 1\}$，则 $2^S = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

在我们正式开始证明之前，我们需要一个引理。

引理 2.1 (紧集的笛卡尔积) 紧集的笛卡尔积仍是紧集，这是说：若 $S_1,\ldots,S_n$ 是紧集，则 $S_1\times\cdots\times S_n$ 是紧集。 ♡

证明

为了证明纳什均衡的存在性，我们还需要一个定理：贝格最大值定理 (Berge maximum theorem)

定理 2.3 (贝格最大值定理) 考虑 $X\subset\mathbb{R}^l, Y\subset\mathbb{R}^m$。$f:X\times Y\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数，$\Gamma:X\to 2^Y$ 是非空、紧值 ($\Gamma(x),\forall x\in X$ 是紧集) 以及连续的对应。则函数：$h:X\to\mathbb{R}$:

$$h(x)=\max_{y\in\Gamma(x)} f(x,y)$$

是连续的，并且

$$G(x)=\{y\in\Gamma(x):f(x,y)=h(x)\}=\arg\max_{y\in\Gamma(x)} f(x,y)$$

是非空、紧值和上半连续的。 ♡

证明 [定理2.1] 假设参与人 i 的战略空间是 S_i，由于我们假设每位参与人有有限的纯战略，不失一般性假设参与人 i 有 i 个纯战略。因此，参与人 i 的战略集 S_i 可以表示为：

$$S_i=\{(p_1,\ldots,p_i):\sum_{k=1}^{i}p_k=1 \text{ 并且 } p_k\geq 0,\ \forall k=1,2,\ldots,k\}$$

此外，我们已经知道参与人 i 的最优对应是其他参与者 $-i$ 的函数，因此假设参与人 i 的最优对应是 $f_i^*:\times_{j\neq i}S_j\to 2^{S_i}$。这个最优对应 f_i^* 意味着：任何 $s_i,s_i'\in f_i^*(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)\subseteq 2^{S_i}$,

$$u_i(s_i,s_{-i})=u_i(s_i',s_{-i})$$

考虑如下对应：F 将任何一个战略组合 $(s_1,\ldots,s_n)$ 返回到每位参与人最优对应的笛卡尔积的元素，也就是 $F:S_1\times\cdots\times S_n\to 2^{S_1}\times\cdots\times 2^{S_n}$,

$$F(s_1,\ldots,s_n)=(f_1^*(s_{-1}),\ldots,f_n^*(s_{-n})).$$

如果我们能证明对应 F 存在不动点，那么我们就证明了纳什均衡的存在性。下面，我们逐个检验该对应满足角谷劲夫不动点定理的条件。

- $S_1\times\cdots\times S_n$ 为非空、紧集、凸集：
  - 非空：这是显然的，如果每一位参与人的战略空间都是空集，那博弈将没有意义；
  - 紧集：由引理2.1我们只需要证明 S_i 是紧集即可。
    1. S_i 是有界集：这是显然的，因为任何两点 $s_i,s_{i'}\in S_i$，我们有 $d(s_i,s_i')\leq i$;
    2. S_i 是闭集：我们用反证法。假设 S_i 不是闭集，则存在一个 S_i 的序列 $(s_i^n)_{n=1}^{\infty}$ 并

且 $\lim\limits_{n\to\infty} s_i^n = s_{il} \notin S_i$，意思是说

$$l = \sum_{k=1}^{i} p_{il}^k > 1.$$

考虑连续函数 $c : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$，其中 $c(p_1, \dots, p_i) = p_1 + \cdots + p_i$。注意到，$c(s_{il}) > 1$，则存在一个邻域 $\mathcal{O}(s_{il}, \varepsilon)$，使得邻域中每一个元素 $s_{in} \in \mathcal{O}(s_{il}, \varepsilon)$ 都满足：

$$\sum_{k=1}^{i} p_{in}^k > 1.$$

根据收敛数列的定义，对于 ε，存在 $N \in \mathbb{N}$，只要 $n > N$，就有

$$d(s_i^n, s_{il}) < \varepsilon \implies s_i^n \in \mathcal{O}(s_{il}, \varepsilon)$$

这就是说，满足以上条件的 s_i^n 给各个纯战略赋予的概率之和大于 1，与 $s_i^n \in S_i$ 矛盾。

  - 凸集：这很显然，简单地算一算即可证明。

- f 有闭图像：由闭图像定理，我们只需要证明 f 是上半连续的即可。由贝格最大值定理立即可得 f 是上半连续的函数；
- $f(s)$ 非空、凸集：非空显而易见，因为纯战略有限，因此必定存在最优对应；凸集也显然，因为任何最优对应的凸组合也是最优对应。

最后，根据角谷劲夫不动点定理，有限参与人和有限战略的完全信息静态博弈，存在一个不动点，而该不动点恰好就是纳什均衡。

第 3 章 完全信息动态博弈

内容提要

- ❑ 失灵的纳什均衡：毁灭地球的王二
- ❑ 子博弈精炼纳什均衡：迷糊的陈清扬
- ❑ 斯塔克尔贝格产量竞争
- ❑ 重复博弈：陈清扬的鉴渣术

我们在本章为大家介绍第二类博弈论模型：完全信息动态博弈。这一类模型的主要贡献者是 1994 年与约翰纳什一起共享诺贝尔经济学奖的莱茵哈德泽尔腾，他提出了：子博弈精炼纳什均衡这一概念。我们会发现，在动态博弈下，子博弈精炼纳什均衡预测的结果要比纳什均衡可靠得多。原因在于子博弈精炼纳什均衡考虑了 “不可置信威胁”(Non-credible threat)。此外，另一个促使我们研究完全信息动态博弈的原因是：现实生活中有许多博弈是参与者有先有后选择行动的，因此我们需要动态博弈对这类问题进行分析。

3.1 失灵的纳什均衡：毁灭地球的王二

纳什均衡这个定义在一些动态模型下可能会失灵，失灵的意思并非是我们求不出纳什均衡，而是这个纳什均衡可能违背我们的直觉。考虑下面这个模型，话说陈清扬和王二已经从芭蕾舞厅看完芭蕾，王二随即要给陈清扬表白。陈清扬可以接受，也可以拒绝，但陈清扬没有那么喜欢王二。王二说，如果你不接受我的表白，我就毁灭地球。我们将该博弈画出来，其中 $(3, 0)$ 表示陈清扬的支付是 3，而王二的支付是 0。

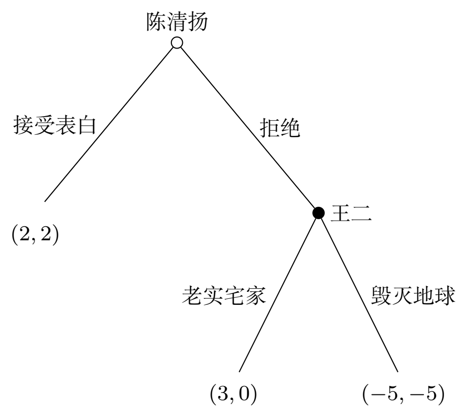

图 3.1: 王二威胁毁灭地球

这个博弈的意思是：陈清扬在第一阶段选择行动：接受表白或者拒绝。如果陈清扬接受表白，博弈结束，陈清扬和王二各自获得 2 的支付。但如果陈清扬拒绝了王二，则博弈进行到第二阶段，王二观察到了陈清扬选择了拒绝，并且在此基础上可以选择行动：老实宅家或者毁灭地球，在王二选择完行动后，博弈结束。若王二选择老实宅家，则陈清扬获得 3，王二获得 0；若王二选择毁灭地球，则陈清扬和王二各获得 -5。我们来分析这个博弈：

- 参与人：陈清扬和王二；
- 行动：陈清扬的可以选择的行动是 {接受表白、拒绝}，王二的是 {老实宅家、毁灭地球}；
- 战略：陈清扬可以选择的战略是 {接受表白、拒绝}，王二可以选择的战略是 {若陈清扬拒绝，则我选择老实宅家；若陈清扬拒绝，则我选择毁灭地球}；为了简化王二的战略并将其和行动区分开，我们用**粗体**来表示王二的战略，即：**老实宅家**和**毁灭地球**；
- 支付我们已经列出。

这个博弈的纳什均衡是什么？回忆我们在前一章求解纳什均衡时，通常是将参与者战略组合对应的支付画出来，然后采取画下划线的方式求出纳什均衡。为了找到这个博弈的纳什均衡，我们将二者的战略对应的支付画出来。

		陈清扬：接受表白	陈清扬：拒绝
王二	**毁灭地球**	$(2,2)$	$(-5,-5)$
	老实宅家	$(2,2)$	$(0,3)$

表 3.1: 毁灭地球的王二

显然，这个博弈有两个纳什均衡：(**毁灭地球**，接受表白) 和 (拒绝，**老实宅家**)。但是第一个纳什均衡是合理的吗？不一定。第一个纳什均衡说："陈清扬会接受表白；如果陈清扬拒绝表白的话，王二会毁灭地球。" 显然，这个预测是不合理的：因为在这个纳什均衡中，王二的战略表明 "一旦陈清扬拒绝王二，王二就会毁灭地球"，但实际上如果陈清扬拒绝王二，王二真的会毁灭地球吗？我们可以观察到王二必然会选择老实宅家，因为毁灭地球会判五年 (-5 的支付嘛)，但老实宅家屁事没有。

有读者会好奇了，为什么纳什均衡会给出这样的预测？原因在于，纳什均衡没有捕捉到博弈的动态性，在这个不合理的纳什均衡中，陈清扬选择接受表白的原因在于：王二威胁陈清扬："如果你不接受我的表白，我就会选择毁灭地球，因此迫于这个威胁，陈清扬选择接受表白。" 这种情况，经济学家通常称之 "不可置信威胁"，也叫 Non-credible threat. 这就引入了我们的另一个解：子博弈精炼纳什均衡。

3.2 子博弈精炼纳什均衡：迷糊的陈清扬

注意到，在王二威胁表白博弈中，我们还有另一个纳什均衡 (拒绝，**老实宅家**)。这个解之所以有其合理之处在于：

- 当博弈进行到陈清扬选择拒绝这个阶段时：王二的战略**老实宅家**是合理的；
- 当博弈处在最初始的阶段时：陈清扬选择拒绝也是合理的。因为陈清扬知道，如果她拒绝，那么王二会选择**老实宅家**，因此她获得 3 的支付；与此同时如果接受表白则只能获得 2 的支付。

将以上的两个重要发现推广，我们获得了子博弈精炼纳什均衡的概念。

定义 3.1 (子博弈精炼纳什均衡)

战略组合 $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ 是子博弈精炼纳什均衡当且仅当该战略组合 s^* 在每一个子博弈中均为纳什均衡。♣

眼尖的读者或许会注意到，我们尚未给子博弈下定义。为了理解子博弈这个概念，我们需要引入另一个概念：迷糊[1]。迷糊的字面意思是，在博弈进行到一定阶段时，你已经分不清你处在什么情况中了，这个我们就称之为迷糊。我们举一个简单的例子来说明什么是迷糊。假设陈清扬和王二在斗地主中，陈清扬先出牌，然后王二再出。陈清扬出牌时手里有：大王和小王，王二出牌时手里有：顺子和炸弹。我们将这个过程画出来，就像图3.2一样。

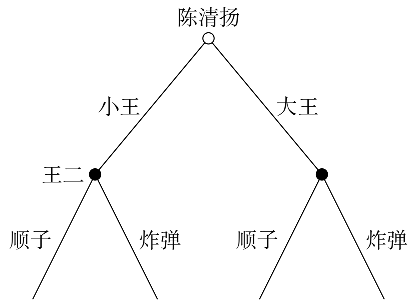

图 3.2: 赌博二人组：清醒的王二

但实际上可能还有另一种情况，王二喝的酩酊大醉之后去跟陈清扬斗地主，结果轮到王二出牌的时候，王二根本记不清陈清扬出了什么牌。这种博弈怎么表达？我们用下面的这样的图来表示，细心的读者或许会发现，唯一的区别就是多了一条虚线。这个虚线表示：在陈清扬出牌后，王二分不清陈清扬出的是大王还是小王，因此王二迷糊了。在博弈论中，如果读者朋友们遇到一条虚线将几个决策结 (decision node) 连起来了，就说明此时行动的参与人分不清这几个结。因为每一个结都是此前一段独特的的行动组合（也就是一段历史）造成的，当参与者分不清这些决策结时，就代表参与人不知道此前发生的一些历史（此前参与人选择的行动）。

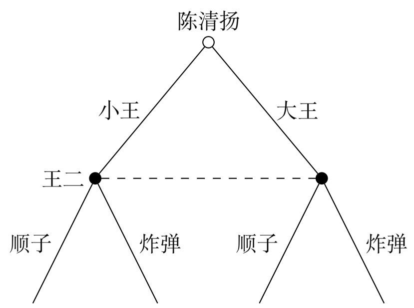

图 3.3: 赌博二人组：喝醉的王二

笔记 [对迷糊的讨论] 有兴趣深入了解“迷糊”的读者可以仔细看一下这一段内容。所谓“迷糊”，实际上指的就是在这一时间点做决策的参与人无法分清自己到底处在情境下，也就是此

[1]经济学上这个东西的正经叫法是信息集，也就是 information set。

时的参与者不知道此前的参与者选择了哪些行动。在经济学上，我们把：在这一时间点，需要做决策的参与人，无法分清的所有决策点[2]构成的集合称之为信息集。若所有信息集都只有一个点，那么我们称这种博弈为“完美博弈”。

为了使读者更加深入地理解“迷糊”这个概念，我们再给大家举一个例子[3]。陈清扬先行动，可以选择 L 或者 R，王二在观测到陈清扬的选择后可以选择 a, b。陈清扬观测到王二的选择后选择 m, n，但是她会忘记自己在第一阶段的选择。

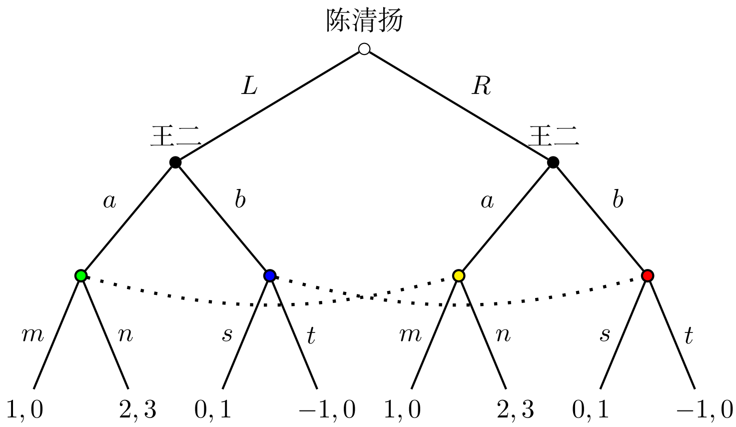

图 3.4: 迷糊：另一个例子

我们再画一些笔墨来解释一下“迷糊”，读者朋友们可以看到，图3.4中一共有两条虚线，一条虚线分别连接了两个决策结，我们在此前的讨论中已经说过，虚线连接的点表示在该点行动的参与人分不清虚线上连接的点。我们可以看到，一条虚线连了绿色和黄色的决策结，一条虚线连接了蓝色和红色的决策结。这说明：陈清扬能分清这两件事：她到底是身处 {绿色决策结、黄色决策结} 还是身处 {蓝色决策结、红色决策结}。

- 但是当陈清扬知道自己处于 {绿色决策结、黄色决策时} 时，陈清扬并不知道她出在哪个决策结（虽然她知道她一定不处于紫色决策结和红色决策结）；
- 同理当陈清扬知道自己处于 {蓝色决策结、红色决策结} 时，陈清扬也不知道她到底处于哪个决策结，但是她知道自己一定不处于绿色决策结和红色决策结。

我们再来看一下每一个决策结是什么意思：

- 绿色决策结：绿色决策结对应的历史是：陈清扬选择 L，王二选择 a；
- 蓝色决策结：蓝色决策结对应的历史是：陈清扬选择 L，王二选择 b；
- 黄色决策结：黄色决策结对应的历史是：陈清扬选择 R，王二选择 a；
- 红色决策结：红色决策结对应的历史是：陈清扬选择 R，王二选择 b。

我们发现，不同的决策结实际上对应不同的历史（一系列行动）。因此，当参与人分不清某几个决策结时，说明参与人实际上分不清这些决策结对应的历史。有了对“迷糊”的讨论，我们现在给子博弈下定义。

[2]决策点的概念也非常自然，就是图3.3中的大黑点。

[3]这个博弈树改编自：https://www.sfu.ca/~haiyunc/notes/Game_Trees_with_TikZ.pdf

定义 3.2 (子博弈)

若满足以下两个条件，则该博弈称之为子博弈：

- 这个子博弈需要从一个不迷糊的状态开始（也就是信息集必须只包括一个点，即参与人完美地知道在这个时间点上，之前发生的所有事情）；
- 如果从开始点之后，某个参与人（包括开始点所对应的参与人自己）迷糊了，那么迷糊的所有点也应该包含在这个子博弈中。

♣

笔记 [一个特殊的子博弈] 在所有子博弈当中，有一个特殊的子博弈：那就是原博弈本身。

为了便于读者理解，我们举一些例子来帮助大家理解子博弈的概念。

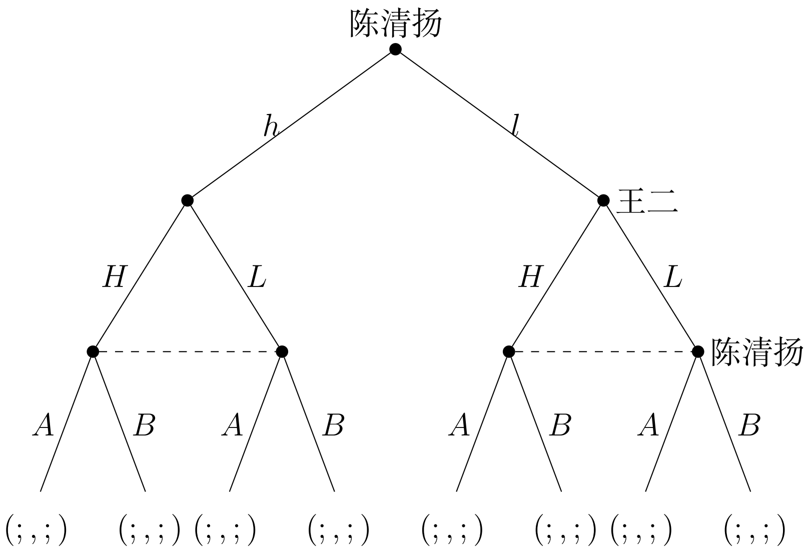

图 3.5: 犯迷糊的陈清扬

这个博弈的意思是：陈清扬先先行动（选择 h 或者 l），王二可以观察到陈清扬的行动，王二观察以后再选择 H 或者 L，最后陈清扬选择 A 或者 B，但是陈清扬迷糊了，陈清扬记得自己的选择 h 或者 l，但是不知道王二选择的是 H 还是 L。

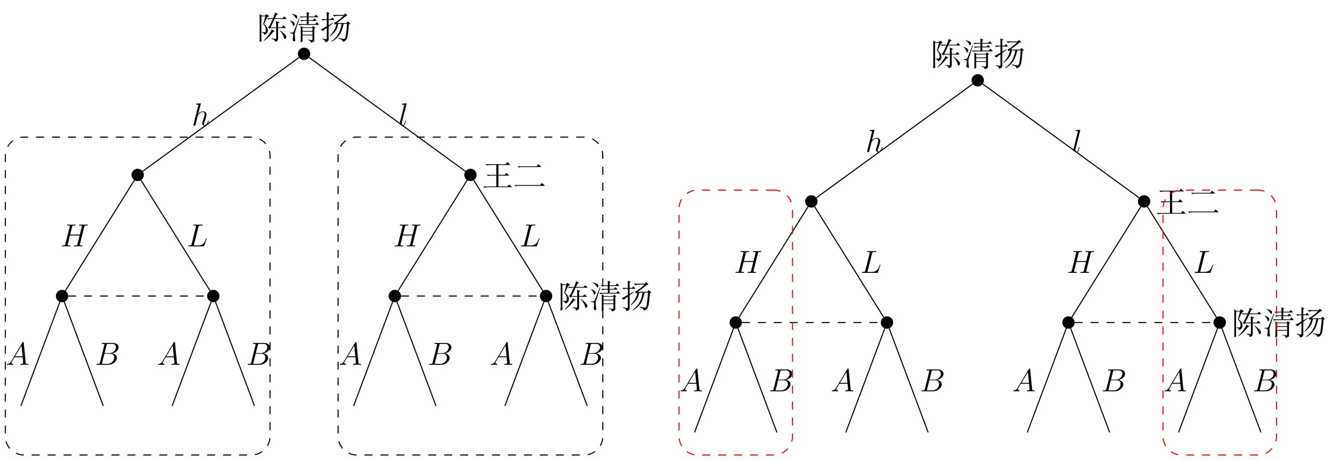

图 3.6: 犯迷糊的陈清扬：两个子博弈

图3.6中，左边那部分两个黑色虚线框框住的是子博弈（想一想为什么），右边那部分图

两个红色虚线框框住的不是子博弈，因为红色虚线框的子博弈分别是从王二选择 H 和 L 开始的，无论是哪种情况，陈清扬作为该子博弈的开始人处于“迷糊状态”（信息集有多个决策点），因此不符合子博弈的第一个要求。

笔记 [求解子博弈精炼纳什均衡] 如何求解子博弈精炼纳什均衡，我们一般都采取逆向归纳法 (Backward induction)。意思就是从博弈的最后一个子博弈开始考虑，求这个子博弈的纳什均衡，然后再考虑前一个子博弈的纳什均衡，以此类推。

我们再回过头看本章开头的那个例子，我们将用这个例子教大家如何求解子博弈精炼纳什均衡。

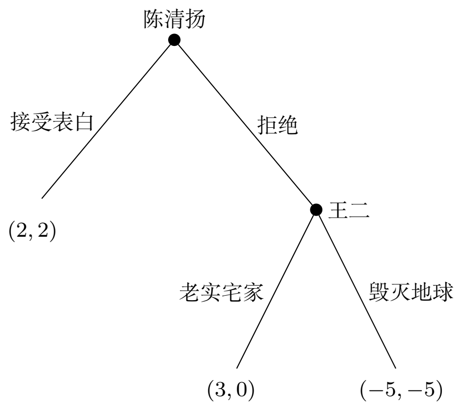

图 3.7: 王二威胁毁灭地球

该博弈一共有两个子博弈，第一个子博弈是：当陈清扬选择拒绝后，王二选择老实宅家或者毁灭地球，很显然该子博弈的纳什均衡是王二选择老实宅家；第二个子博弈是整个博弈，我们在开头的第3.1中已经求得了该子博弈一共有两个纳什均衡：(**毁灭地球**，接受表白) 和 (拒绝，**老实宅家**)。因此，这个博弈的子博弈精炼纳什均衡为：(拒绝；若陈清扬拒绝，我就老实宅家)。

笔记 [子博弈精炼纳什均衡] 因为子博弈精炼纳什均衡在所有子博弈中构成纳什均衡，因此子博弈精炼纳什均衡必为纳什均衡。

3.3 斯塔克尔贝格产量竞争模型

斯塔克尔贝格模型，洋文名字是 Stackelberg quantity competition model。这个模型和古诺模型有相似之处，其唯一的区别就是产量的选择有先有后。我们将该模型详细叙述如下：一个市场的需求是 $p = a - bq$，陈清扬先行动选择产量 q_c，王二后行动选择产量 q_w，假设二者生产一单位产品的成本一样，都是 c。斯塔克尔贝格模型问的问题是：陈清扬和王二会如何选择产量？换句话说，这个博弈的子博弈精炼纳什均衡是什么。

按照惯例，我们先不求解，而是猜一下最后子博弈精炼纳什均衡应该有哪些特征：

- 陈清扬的产量将和王二的产量不一样，原因在于陈清扬和王二在这个博弈中并不对称，因为陈清扬可以先行动；

- 陈清扬会赚得更多，因为陈清扬可以先行动，而王二的产量选择问题建立在陈清扬选择的产量下，故而陈清扬可以有一定的先机；
- 由于陈清扬赚得更多，因此我们推断在子博弈精炼纳什均衡下，陈清扬生产的产量也比王二高（因为两人面临的价格和单位成本一样）；
- 二人的均衡产量都是关于 b, c 递减，关于 a 递增的。

为了分析清这个问题，我们先来分析各种可能的子博弈，显然陈清扬选择了一个 q_c 都会开启一个子博弈。还有一种子博弈就是全博弈，也就是博弈本身。我们先来求第一种子博弈的纳什均衡。

- 当陈清扬选择 q_c 时引发的子博弈：当陈清扬选择 q_c 时，王二若选择 q_w，其支付为：
$$pq_w - cq_w = (a - bq_c - bq_w)q_w - cq_w \implies q_w^* = \frac{a - bq_c - c}{2b}$$
因此，对于陈清扬选择 q_c 开始的子博弈，我们已经求的了该子博弈（们）的纳什均衡：王二的纳什均衡战略为“若陈清扬选择 q_c，则我王二选择 $q_w = \frac{a-bq_c-c}{2b}$”。
- 再上一层级的子博弈就是原博弈，我们来求原博弈的纳什均衡：我们已经知道若陈清扬选择 q_c，则王二会选择 $q_w = \frac{a-bq_c-c}{2b}$。因此，原博弈的纳什均衡即为陈清扬选择 q_c 最大化自己的支付：
$$\max_{q_c} pq_c - cq_c = \max_{q_c}(a - bq_c - b\frac{a - bq_c - c}{2b})q_c - cq_c$$
$$\implies q_c^* = \frac{a-c}{2b}, \quad q_w^* = \frac{a-c}{4b}$$

因此，我们可以有自信地说，这个博弈的子博弈精炼纳什均衡是：
$$q_c^* = \frac{a-c}{2b}, q_w^* = \frac{a - bq_c - c}{2b}$$

3.4 重复博弈：陈清扬的鉴渣术

有一类经济学家特别关注的完全信息动态博弈：重复博弈。重复博弈就是相同的博弈重复多次，其中无限重复博弈是我们更频繁遇到的模型，原因在于：无限重复博弈是重复无限次，因此我们在哪个阶段开始分析都一样，因此分析无限重复博弈实际上简化了我们的分析。

在第1.2节，我们曾经提出经济学家的一个首要工作是提出一个标准用来比较不同的结果，并且想办法实现一些改进。我们在这一小节探讨经济学家的如何做这件事，我们还是以陈清扬和王二的囚徒困境为例子。

		陈清扬	
		招供	抵赖
王二	招供	$(-2, -2)$	$(0, -3)$
	抵赖	$(-3, 0)$	$(-1, -1)$

表 3.2: 囚徒困境

我们已经知道这个博弈的纳什均衡是双方都招供，因此双方都判两年。但是明明有一个更好的结果：如果双方都选择抵赖的话，每个人都判一年。怎么实现这个结果？如果是在完全

信息动态博弈下，我们可以实现这样的结果，让陈清扬和王二走出囚徒困境。考虑这样的一个博弈：陈清扬和王二进行无数次囚徒困境的博弈，但是陈清扬和王二都当期能观测到对手在之前所有历史的选择（当然参与人无法观测到对手在当期的选择）。为了进行跨期的分析，我们不得不对支付进行一些假设，那就是引入贴现因子 β：

$$u_c = u_0 + \beta u_1 + \beta^n u_n + \dots$$

β 被我们称作折现因子，u_k 是第 k 期的阶段支付 (stage payoff)。可以看到，如果 β 越大，则加总的支付越大；β 越小，加总的支付越小（从而总支付很大程度上取决于第零期的阶段支付 u_0）。在经济学上，我们认为 β 可以翻译成 "耐心程度"，也就是参与者对未来的看法，如果参与者重视未来（从而重视未来的收益）那么该参与者则拥有较大的贴现因子（足够耐心）；反之若参与者不是很重视未来，那么未来的支付多寡与她而言无所谓，因此该参与者就拥有较小的贴现因子。

笔记 [一个关于支付的例子] 假设王二和陈清扬的战略是：无论对手怎么选，无论我在上一期观测到什么，我总是选择抵赖，则陈清扬和王二的支付为：

$$(-1) + \beta(-1) + \dots + \beta^n(-1) + \dots = \frac{1}{1-\beta}(-1)$$

陈清扬决定想一个办法来鉴定王二是否是渣男，因此她决定和王二玩重复博弈：一旦王二选择了坦白，那么王二就是渣男。陈清扬在玩游戏之前，咨询了闺蜜的意见，决定采取以下的战略来对付王二：我一开始总是选择抵赖，但是如果一旦我观测到王二选择招供，那么我就从今往后一直选择招供[4]；并且一旦我自己招供，我也会一直招供下去。我们将证明这个陈清扬和王二都采用这个冷酷战略将构成一个子博弈精炼纳什均衡。由于陈清扬和王二是一样的（除了性别和长相不一样，在这个博弈中二人完全一致），我们假设王二总是采取冷酷战略，并且我们从陈清扬的视角考虑问题。

由于这个博弈是无穷期的，因此我们从任何一期开始考虑问题都没有影响。这个博弈有两类子博弈：

- 第一类子博弈是：此前王二从来没有选择过坦白。因此，为了让这一类子博弈的纳什均衡为陈清扬总是选择抵赖，我们需要让陈清扬选择抵赖的支付大于坦白的支付，也就是[5]
$$\underbrace{(-1) + \beta(-1) + \dots}_{\text{抵赖的支付}} > \underbrace{0 + \beta(-2) + \dots}_{\text{坦白的支付}} \implies \frac{1}{1-\beta}(-1) > \frac{\beta}{1-\beta}(-2) \iff \beta > \frac{1}{2}.$$
- 第二类子博弈是：王二此前曾经坦白过，那么陈清扬此时的最优策略还是一直坦白下去，因为王二会一直坦白下去⋯⋯

综上所述，当 $\delta > \frac{1}{2}$ 时，我们的冷酷战略构成了这个博弈的子博弈精炼纳什均衡，最后的结果是陈清扬和王二会一直选择抵赖，双方走出了囚徒困境。

笔记 [对 δ 的讨论] 直觉上只要 δ 足够大，双方就不会从抵赖背离到坦白。原因在于，δ 实际上衡量参与人对未来的重视程度，如果未来的阶段支付足够重要，那么参与人不会因为眼前的

[4]这个战略的经济学学名是冷酷战略，也叫做 Grim trigger strategy。

[5]注意到，因为王二采取了冷酷战略，所以一旦陈清扬选择了坦白，那么王二在下一期必然会选择坦白，因此陈清扬的最优策略就变成了一直坦白下去⋯⋯

小利舍弃未来的支付。经济学上，我们管 δ 叫贴现因子，时用来衡量未来重要程度的一个参数。

第 4 章 不完全信息静态博弈

内容提要

- 贝叶斯纳什均衡：和受虐狂王二打交道；
- 拍卖：一只特立独行的猪；
- 拍卖：多人哄抢猪兄
- 通过菜单区分消费者；
- （连续型）通过菜单区分消费者

有一段时间内，经济学家不知道如何处理不完全信息静态博弈，直到约翰海萨尼的出现。他解决了这个问题，也在 1994 年与约翰纳什、莱茵哈德泽尔腾共享了诺贝尔经济学奖。举一个简单的例子来说明不完全信息静态博弈，就是某一个参与人可能人格分裂，有可能是受虐狂，也有可能是控制狂，相同的行动组合给这个这个人格分裂参与者带来的支付是别人不知道的，这就是不完全信息的定义。从更精确一点的角度来讲，就是给定了参与人的各个行动，至少有一个参与人的支付我们是不清楚的。怎么处理这个问题？经济学家想到了这个办法：引入类型这个概念。

笔记 [不完全信息博弈] 如果对更精准的定义感兴趣的同学可以看一下这里的笔记：不完全信息指的是至少有一位参与人 j 和一个所有参与人的行动组合 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 使得所有参与人都不知道参与人 j 在这个行动组合下的支付：$u_j(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。经济学家处理这类问题的方法是引入类型：$\theta_{受}, \theta_{控}$ 并大家知道 j 在两种类型下的支付：

$$u_j(a_1, \ldots, a_n; \theta_{受}) \text{ 和 } u_j(a_1, \ldots, a_n; \theta_{控})$$

4.1 贝叶斯纳什均衡：和受虐狂王二打交道

上面的描述有一点抽象，我们用下面这个例子给大家再仔细讲一讲不完全信息静态博弈是怎么回事儿。我们还是考虑囚徒困境，但是王二变了，王二可能是普通的王二，也可能是受虐狂王二。受虐狂王二的突出表现是无论陈清扬招供还是抵赖，（受虐狂）王二都倾向于抵赖（可能是舔狗）。陈清扬不知道王二是否是受虐狂，但是她认为王二是受虐狂的概率是 0.5。显然，如果王二是普通人，无论陈清扬怎么选择，他都更偏好于招供；如果王二是受虐狂，无

		陈清扬：招供	陈清扬：抵赖
王二	招供	$(\underline{-2}, \underline{-2})$	$(\underline{0}, -3)$
	抵赖	$(-3, \underline{0})$	$(-1, -1)$

		陈清扬：招供	陈清扬：抵赖
王二（受虐狂）	招供	$(-5, \underline{-2})$	$(-5, -3)$
	抵赖	$(\underline{-0}, \underline{0})$	$(\underline{0}, -1)$

表 4.1: 囚徒困境：王二是受虐狂吗？

论陈清扬怎么样，他都更偏好于抵赖。陈清扬则不受影响，无论王二是不是受虐狂，她都更喜欢招供。因此，我们可以预测这个博弈的均衡是：陈清扬招供，普通王二招供，受虐狂王二抵赖。我们发现，王二的战略是由其类型决定的，因此在不完全信息的博弈下，具有私人信

息的参与者的战略不光是事先的全盘打算，还要根据不同的类型来确定，即“如果我是这个类型 t_1，则我选择行动 a_1”... 我们还没有对不完全信息静态博弈下一个定义，我们这就来说明其意义。

定义 4.1 (不完全信息静态博弈)

不完全信息静态博弈有以下几个要素：

- 参与人；
- 行动：每一位参与人有自己可以选择的行动；
- 类型：每一个参与人都有自己的类型，但每个人的类型只有自己知道，其他参与人不知道；但大家对彼此是什么类型有一个猜测，并且所有人都知道这个猜测；
- 支付；

♣

笔记 [更精确的定义] 一个不完全信息静态博弈应该由以下的要素构成：

- 参与人集：$N = \{1, 2, \ldots, n\}$；
- 行动集：A_i 是参与人 i 的行动集合，它的元素 a_i 表示参与人 i 的行动 a_i；
- 类型集：Θ_i 是参与人 i 所有可能的类型，它的元素 θ_i 表示参与人 i 的一个类型，并且所有人的类型组合是 $p(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ 的概率是大家都知道的；
- 支付：参与人 i 的支付是一个函数：$u_i : \Theta_i \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N \to \mathbb{R}$，其意义是：当参与人类型和所有人的行动已知时，我们就知道了参与人的支付。

那么我们应该如何定义不完全信息静态博弈下的均衡？回忆纳什均衡的概念：纳什均衡是一组战略组合，使得所有的参与人一旦达到这个战略组合都不会偏离它（即，给定别人采取纳什均衡战略，自己必然也会采用纳什均衡战略）。由于这里是不完全信息静态博弈，因此我们只需要稍微改修改一下纳什均衡中支付的定义即可：将其改为期望支付。因此，我们称这个均衡为：贝叶斯纳什均衡 (Bayesian Nash equilibrium)。

定义 4.2 (贝叶斯纳什均衡)

贝叶斯纳什均衡是一组战略组合，使得所有参与人一旦达到这个战略组合，则没有任何一位参与人有动机背离自己的战略。更精确地说，如果战略组合 $(s_1^*(\theta_1), s_2^*(\theta_2), \ldots, s_n^*(\theta_n))$ 满足以下条件，

$$EU_{\theta_{-i}}\left[s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i\right] \geq EU_{\theta_{-i}}\left[s_i(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i\right], \quad \forall i \in N \text{ 和} s_i(\theta_i) \in S_i, \theta_i \in \Theta_i$$

则这个战略组合是贝叶斯纳什均衡。

♣

笔记 [翻译：贝叶斯纳什均衡] 请大家千万不要被这个式子吓到，这个式子的意思就是：参与人 i 的战略能带来最大的数学期望（平均值）。大家可能会疑惑，这个数学期望从哪里来的？就是从事前参与人不确定其他参与人的类型 θ_{-i} 中来的。因此，$EU_{\theta_{-i}}\left[s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i\right]$ 的意思是：类型为 θ_i 的参与人选择战略 $s_i^*(\theta_i)$ 时，其他参与人选择 $s_{-i}^*(\theta_{-i})$ 所带来的期望支付，期望是来源于对其他参与人类型的不确定性。

4.2 拍卖：一只特立独行的猪

不完全信息静态博弈的一大用武之地就是拍卖。关于拍卖有一本非常出名的经济学教材 [3]，想要深入了解拍卖理论的读者可以深入阅读一下这本书。我们在本小节给各位读者朋友介绍一下几个关于拍卖的基本概念，并且为大家深入地讲解一个简单的拍卖模型。

- 英式拍卖：英式拍卖也叫公开升价拍卖。这是我们大家都熟悉的一种拍卖方法，拍卖人从最低的价格开始叫价，只要有最少两个竞标人在竞争，那拍卖人就一直增加价格，直到最后只有一位竞标人感兴趣时，拍卖人就停止升价了；
- 荷式拍卖：荷式拍卖也叫公开降价拍卖。一般我们很少见，但是只是出于分析的需要，经济学家也在研究这类模型。其过程是拍卖人一开始叫一个非常高的价格，然后逐渐降价，直到第一位参与人开始想要出价；
- 一级价格密封拍卖：这个也是我们很常见的拍卖形式。所有人把自己愿意的出价写在一张纸上，然后拍卖人收集所有人的纸，把拍卖品按照最高出价卖给出价最高的人；
- 二级价格密封拍卖：这个形式不太常见。流程是所有人把自己愿意的出价写在一张纸上，然后拍卖人收集所有人的纸，把拍卖品按照第二高的出价卖给出价最高的人。

在这一小节中，我们给大家介绍一级价格密封拍卖。王小波在其散文《一只特立独行的猪》中里写到他的猪兄擅长躲避村民的捕捉而能够不被杀来吃掉，但最后终究还是变成了一头流浪猪。我们考虑下面的情景：某一天猪兄终于被缉拿归案，王二和陈清扬想要把这头猪从军代表那里赎回，军代表提议“我们来搞一场一级价格密封拍卖吧，价高者就能拥有这头猪。”我们来分析陈清扬和王二的出价策略和这个博弈的贝叶斯纳什均衡。

我们将博弈梳理如下：

- 参与人：（竞标人）陈清扬和（竞标人）王二；
- 标的物：猪兄；
- 类型：类型是猪兄在陈清扬和王二心中的分量（也就是价值），记为 v_c, v_w，这个是二者的私人信息，但是双方都知道对方的 v 服从 $[0,1]$ 的均匀分布[1]，我们把分布函数记为 F，把密度函数记为 f;
- 战略[2]：出价，我们记陈清扬的出价为 $b_c(v_c)$，王二的出价为 $b_w(v_w)$；
- 支付：这里的支付具有一定的挑战性。我们仅列出陈清扬的支付，王二的支付同理。

$$u_c(b_c, b_w; v_c) = \begin{cases} v_c - b_c, & \text{if } b_c > b_w \\ \dfrac{v_c - b_c}{2}, & \text{if } b_c = b_w \\ 0, & \text{if } b_c < b_w \end{cases}$$

这个支付的意思是：如果陈清扬的出价更高 $(b_c > b_w)$，则陈清扬赢得拍卖品支付她提交的价格 b_c，获得支付 $v_c - b_c$；如果陈清扬和王二的出价一样高 $(b_c = b_w)$，则二人各得到

[1]均匀分布的知识点：当 $x \in (0,1)$ 时，则 $v \leq x$ 的概率是 x。

[2]请读者朋友们注意，在不完全信息静态博弈中，参与者的战略是根据类型来的，这里类型即为猪兄对参与者的价值。

一半的猪肉；如果陈清扬的出价更低 ($b_c < b_w$)，则王二赢得拍卖品，陈清扬只能灰溜溜地回家，获得 0 支付。

我们还是从陈清扬的角度考虑问题，假设王二的均衡出价战略为 $b_w(v_w) = b(v_w)$，则陈清扬出价 b_c 的期望支付为

$$u_c = (v_c - b_c)Pr(b_w(v_w) < b_c)$$

其中，$(v_c - b_c)$ 是陈清扬赢得标的物后的支付，$Pr(b_w(v_w) < b_c) = Pr(b(v_w) < b_c)$ 是陈清扬赢得拍卖的概率（也就是陈清扬出价更高的概率），显然 $b(v_w)$ 必然是关于 v_w 严格单调递增的一个函数，因为当 v_w 增大时，增加一些出价可以提高获胜的概率。我们将陈清扬的期望支付化简:

$$\begin{aligned} u_c &= (v_c - b_c)Pr(b_w(v_w) < b_c) \\ &= (v_c - b_c)Pr(v_w < b^{-1}(b_c)) && \text{(由于 } b(v_w) \text{ 是严格单调递增的)} \\ &= (v_c - b_c)F\left[b^{-1}(b_c)\right] \end{aligned}$$

因此，陈清扬面临的问题是选择一个数字 b_c 去最大化她的期望支付:

$$\max_{b_c} \quad (v_c - b_c)F\left[b^{-1}(b_c)\right]$$

直接对上式求导，我们得到:

$$-F\left[b^{-1}(b_c)\right] + (v_c - b_c)f\left[b^{-1}(b_c)\right]b^{-1\prime}(b_c) = 0$$

注意到反函数的导数为 $[f^{-1}]'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$，因此上面的一阶条件转变为:

$$-F\left[b^{-1}(b_c)\right] + (v_c - b_c)f\left[b^{-1}(b_c)\right]\frac{1}{b'(b^{-1}(b_c))} = 0$$

注意到在均衡时，陈清扬和王二的战略是一样的，因此 $b^{-1}(b_c) = v_c$，因此我们可以将上述一阶条件化简为:

$$-F(v_c) + (v_c - b_c f(v_c))\frac{1}{b'(v_c)} = 0$$

注意到由于 F 是 $[0,1]$ 均匀分布上的分布函数，因此 $F(a) = a, \forall a \in [0,1]$ 以及 $f(a) = 1$。我们可以进一步将以上的一阶条件化简为:

$$-v_c + (v_c - b_c)\frac{1}{b'(v_c)} = 0$$

注意到在均衡时 $b_c = b(v_c)$，因此上面的一阶条件可以进一步写成:

$$-v_c + (v_c - b(v_c))\frac{1}{b'(v_c)} = 0 \iff b'(v_c)v_c = v_c - b(v_c) \iff b'(v_c)v_c + b(v_c) = v_c$$

可以发现，左边的式子是 $b(v_c)v_c$ 关于 v_c 的导数，右边的式子是 $\frac{v_c^2}{2}$ 关于 v_c 的导数。因此，我们发现均衡的出价战略应该是 $b(v_c) = \frac{v_c}{2}$。

4.3 拍卖：多人哄抢猪兄

这一小节的内容主要借鉴了 [3] 的第 2.3 节。我们在这一节讨论一个更一般的拍卖模型：考虑陈清扬、王二和村民一起参与拍卖（因此一共有 n 名竞标者），猪兄对每一位竞标者的价值都是私人信息（也就是其类型），每一位参与人都知道其他参与人的类型服从的分布是 $F\sim[0,\omega]$。不失一般性，我们考虑陈清扬的支付（因为参与人此时全都是对称的），陈清扬的支付是：

$$u_c(b_c;v_c)=\begin{cases} v_c-b_c, & \text{if } b_c>\max\limits_{j\neq c} b_j \\ 0, & \text{if } b_c<\max\limits_{j\neq c} b_j \end{cases}$$

当有多个最高出价者时，这些最高出价者平分猪兄。

我们假设最终所有的参与者的均衡出价是 (v)，也就是类型为 v 的竞标者出价为 $b(v)$。同时不失一般性，我们假设陈清扬就是第一位竞标者。因此，陈清扬的支付为：

$$(v_c-b_c)Pr\Big(b_c\geq \max_{i\neq 1} b(v_i)\Big)$$

显然，

$$\max_{i\neq 1} b(v_i)=b(\max_{i\neq 1} v_i) \qquad \text{(由于 } b(v) \text{ 是递增的)}$$

显然，$\max\limits_{i\neq 1} v_i$ 也是一个随机变量，我们不妨简记其为 Y_1，其分布为 $G(Y_1)$，密度函数为 $g(Y_1)$，因此我们将陈清扬的期望支付写为：

$$(v_c-b_c)\times G\Big(b^{-1}(b_c)\Big)$$

上式关于 b_c 的一阶条件是：

$$-G\Big(b^{-1}(b_c)\Big)+\frac{g\Big(b^{-1}(b_c)\Big)}{b'(b^{-1}\Big((b_c)\Big)}(v_c-b_c)=0$$

由于在最优解处：$b_c=b(v_c)$，因此上式可以化简成：

$$G(v_c)b'(v_c)+g(v_c)b(v_c)=v_cg(v_c)$$

注意到左边的式子实际上是 $G(v_c)b(v_c)$ 关于 v_c 的导数，因此

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv_c}[G(v_c)b(v_c)]=v_cg(v_c) &\implies G(v_c)b(v_c)=\int_0^{v_c} yg(y)dy && \text{(微积分基本定理)} \\ &\implies b(v_c)=\frac{1}{G(v_c)}\int_0^{v_c} yg(y)dy \end{aligned}$$

4.4 通过菜单区分消费者

贝叶斯纳什均衡还有一个非常重要的应用就是机制设计。机制设计，就像这个学科名字所暗示的那样，研究的是如何设计机制。我们不打算给大家深入讲解机制设计是怎样的一门学科，感兴趣的读者可以阅读 [4] 第 23 章和 [2]。大家从下面这个例子中，可以对机制设计有

一些感性的了解。话说陈清扬和王二打算开一家网店，主打塔罗牌占卜服务，她们打算搞一个菜单："每 q 小时 T 元"，她们提供这项服务的成本为 c 每小时。在开店之前，顾客如果花 T 元购买 q 小时的服务的支付为：

$$\theta v(q) - T$$

θ 是消费者的私人信息，但是王二通过贿赂村长的方式得到了一些信息：村民中有两类，一类是高需求 θ_H，一类是低需求 $\theta_L < \theta_H$，其中高需求的占比为 γ。那么，陈清扬和王二如何定价可以赚最多的钱？实际上，陈清扬和王二想干的事是：

$$\max_{\{q_H,T_H,q_L,T_L\}} \gamma(T_H - cq_H) + (1-\gamma)(T_L - cq_L)$$

但请各位同学注意，这个式子隐藏了一个重要的条件：θ_H 会选择 q_H, T_H，同时 θ_L 会选择 q_L，怎么保证这件事？那么我们需要加一些约束。

$$\theta_L v(q_L) - T_L \geq 0 \qquad \text{(参与约束：低需求)}$$

$$\theta_H v(q_H) - T_H \geq 0 \qquad \text{(参与约束：高需求)}$$

$$\theta_L v(q_L) - T_L \geq \theta_L v(q_H) - T_H \qquad \text{(个人理性约束：低需求)}$$

$$\theta_H v(q_H) - T_H \geq \theta_H v(q_L) - T_L \qquad \text{(个人理性约束：高需求)}$$

以上这四个约束就能保证各个消费者选择与其相符合的，陈清扬和王二为其量身定制的菜单了。参与约束是指：一个菜单必须要让消费者至少有点赚的，如果买了这个菜单支付还是负的，那消费者根本不会买。个人理性约束是说：消费者要购买自己的菜单，而不会购买为别人打造的菜单。

我们先不求解具体的均衡，而是通过直觉来猜想。从直觉上来看，如果陈清扬和王二能分清谁是高需求，谁是低需求是最好的。因为如果能在信息对称的情况下定价，从高需求者身上赚的钱更多，从低需求者身上赚的钱更少。但在这个问题中，陈清扬和王二无法区分消费者，因此相比于信息对称的情况下，陈清扬和王二会有一些利润损失。此外，高需求者很可能会伪装成低需求者，因此我们猜测高需求者的个人理性约束是等式成立的[3]。

引理 4.1 (高需求，高支付)

在最优的菜单下，高需求消费者的支付高于低需求消费者的支付。换句话说，如果最优菜单是 $(q_L^*, T_L^*, q_H^*, T_H^*)$，那么

$$\theta_H v(q_H^*) T_H^* > \theta_L v(q_L^*) - T_L^*$$

♡

证明 由高需求消费者的个人理性约束：

$$\theta_H v(q_H) - T_H \geq \theta_H v(q_L) - T_L > \theta_L v(q_L) - T_L$$

这个引理说明两件事：

- 在最优菜单下，低需求消费者的支付必然为 0，否则陈清扬和王二总是可以通过提高 T_L 的方式来增加她们的利润；

[3] 回想一下菜市场的例子，高需求者往往会伪装成低需求者，索要更低的价格。这个例子在这里虽然不太合适，但是有异曲同工之妙。

- 在最优菜单下，高需求消费者的支付是大于 0 的，因此我们可以合理猜测[4]高需求的消费者的个人理性约束是等号成立的。

所以，陈清扬和王二的开店问题就正式转化成了以下的问题：

$$\begin{aligned}\max_{q_H,T_H,q_L,T_L} \quad & \gamma(T_H - cq_H) + (1-\gamma)(T_L - cq_L) \\ \text{s.t.} \quad & \theta_L v(q_L) - T_L = 0 \\ & \theta_H v(q_H) - T_H = \theta_H v(q_L) - T_L\end{aligned}$$

注意到 T_L 和 T_H 都可以通过 q_L 和 q_H 代换掉，所以最后的问题变成了：

$$\begin{aligned}\max_{q_H,q_L} \quad & \gamma(T_H - cq_H) + (1-\gamma)(T_L - cq_L) \\ \text{s.t.} \quad & T_L = \theta_L v(q_L) \\ & T_H = \theta_H v(q_H) - \theta_H v(q_L) + T_L\end{aligned}$$

最后，我们得到了最优解：

$$\begin{aligned}\theta_H v'(q_H^*) &= c \\ \theta_L v'(q_L^*) &= \frac{c}{1 - (\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\theta_H-\theta_L}{\theta_L})}\end{aligned}$$

例题 4.1 请读者检验在最优解下，低需求者的个人理性约束和高需求者的参与约束均成立。

笔记 [放弃低需求消费者市场] 从最终解的形式上看，我们可以发现当 γ 足够大时，$\theta_L v'(q_L^*)$ 会变成负数，原因在于当 γ 足够大时（也就是高需求的消费者足够多时），陈清扬和王二可以放弃兼顾两个市场，直接提供最优菜单给高需求的消费者（而不管低需求的消费者）。

4.5 （连续型）通过菜单区分消费者

上一节我们介绍了在只有两类消费者类型下如何最优定价，这一节我们介绍连续型消费者类型的最优菜单。让我们把情景叙述如下：陈清扬和王二在他们插队的某云南小镇准备经营一家盲盒店。她们最近在准备菜单，但是不知道怎么定价才能赚更多钱。他们知道 θ 村民花 T 块钱买 q 个盲盒获得的支付是：

$$\theta v(q) - T$$

她们不知道村民的 θ 但知道 $\theta \sim [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$，其分布的概率密度函数为 $f(\theta)$。问怎么设计菜单 $\{q, T\}$ 能赚最多钱？其中 $\{q, T\}$ 的意思是：q 个盲盒售价 T 元。因此，实际上陈清扬和王二想干的是下面这件事：

$$\max_{T(\theta),q(\theta)} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \Big[T(\theta) - cq(\theta)\Big] f(\theta) d\theta$$

[4]经济学理论一般都是先猜再验证。

以上的式子隐含了一个假设：那就是 θ 消费者必定会选择 $\{q(\theta), T(\theta)\}$，什么样的约束可以保证这一点？实际上两个约束就可以：

$$\theta v(q(\theta)) - T(\theta) \geq 0 \tag{参与约束}$$

$$\theta v(q(\theta)) - T(\theta) = \max_{\theta'} \ \theta v(q(\theta')) - T(\theta') \tag{理性约束}$$

参与约束的意思是：θ 村民选择菜单 $\{q(\theta), T(\theta)\}$ 必须得获得正的效用，不然还不如不买盲盒；理性约束的意思是 θ 村民只会选择自己的菜单 $\{q(\theta), T(\theta)\}$ 而不会选择 θ' 的菜单。

引理 4.2 (高类型，高支付)

对于任意的 $\theta < \theta'$，最优的菜单必须满足：

$$\theta' v(q(\theta')) - T(\theta') > \theta v(q(\theta)) - T(\theta)$$

♡

证明 由 θ' 的理性约束可得：

$$\theta' v(q(\theta')) - T(\theta') \geq \theta' v(q(\theta)) - T(\theta) > \theta v(q(\theta)) - T(\theta).$$

该引理非常非常重要，因为我们可以立刻得到以下两个结论：

- 在最优菜单下，最低类型消费者的支付必为 $\underline{\theta} v(q(\underline{\theta})) - T(\underline{\theta}) = 0$，否则陈清扬和王二总可以通过增加 $T(\underline{\theta})$ 来增加自己的利润；
- 只要 $\underline{\theta} v(q(\underline{\theta})) - T(\underline{\theta}) = 0$，则其他类型消费者的参与约束自动满足；

引理 4.3 (替换 $T(\theta)$)

假设在最优菜单 $\{q(\theta), T(\theta)\}$ 下，消费者 θ 的支付为 $U(\theta) = \theta v(q(\theta)) - T(\theta)$，则此时的菜单价格 $T(\theta)$ 为：

$$T(\theta) = -U(\theta) + \theta v(q(\theta))$$

♡

证明 根据 θ 的理性约束：

$$U(\theta) = \max_{\theta'} \ \theta v(q(\theta')) - T(\theta') \implies U'(\theta) = v(q(\theta)).$$

对上式积分得到：

$$U(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(t))dt + U(\underline{\theta})$$

同时注意到：

$$U(\theta) = \theta v(q(\theta)) - T(\theta) \implies T(\theta) = -U(\theta) + \theta v(q(\theta))$$

在两个引理的协助下，陈清扬和王二的最优定价问题变成了下面的问题：

$$\max_{q(\theta)} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[\theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(t))dt - cq(\theta)\right] f(\theta)d\theta$$

笔记 [灵活运用换元积分法] 我们先算中间那一项的积分因为它长得比较难看：

$$
\begin{aligned}
&\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(t))dtdF(\theta) \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(t))dt \cdot F(\theta)\Big|_{\theta=\underline{\theta}}^{\theta=\overline{\theta}} - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f(\theta)d(\int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(t))dt) \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(t))dt - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f(\theta)v(q(\theta))d\theta \qquad \text{(微积分基本定理)} \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(\theta))(1 - f(\theta))d\theta
\end{aligned}
$$

最终，陈清扬和王二的定价问题完全地转化成了：

$$
\max_{q(\theta)} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \Big[\theta v(q(\theta)) - cq(\theta)\Big] f(\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v(q(\theta))(1 - f(\theta))d\theta
$$

我们换一个角度来想，如果 $q^*(\theta)$ 是这个问题的最优解，那么如果把菜单换成：$q^*(\theta) + \alpha h(\theta)$，对于任意的 $h(\theta)$，最优的 α 应该为 0。跟随这个想法，陈清扬和王二又重新写了她们的问题：

$$
\max_{\alpha} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \Big[\theta v\big[q^*(\theta) + \alpha h(\theta)\big] - c\big[q^*(\theta) + \alpha h(\theta)\big]\Big] f(\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v\big[q^*(\theta) + \alpha h(\theta)\big](1 - f(\theta))d\theta
$$

对 α 求导，并令 α 为零，陈清扬和王二得到下面这样的条件：

$$
\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \Big[\theta v'(q^*(\theta)) - v'(q^*(\theta))\frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} - c\Big] h(\theta)d\theta = 0
$$

显然，这个式子成立的必要条件就是:

$$
v'(q^*(\theta))\Big[\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}\Big] = c.
$$

通过这个条件，我们可以求出来 $q^*(\theta)$，再通过

$$
U(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(t))dt
$$

求得 $U(\theta)$，通过引理4.5即可算出来最优的 $T(\theta)$。陈清扬和王二长舒了一口气，她们决定不开这个店了，算个最优价格太费劲儿了。

第 5 章 不完全信息动态博弈

内容提要

- ❑ 贝叶斯纳什均衡的实效；
- ❑ 完美贝叶斯纳什均衡；
- ❑ 信号博弈：王二是渣男吗？

不完全信息动态博弈，相信读者朋友们阅读到这一章时，已经对我们本章要研究的对象有了一些感性的认识：在这一类模型中，部分参与人有私人信息，同时行动也有先后。正如纳什均衡在完全信息动态博弈情况下会失效一样，贝叶斯纳什均衡在不完全信息动态博弈下也会给出一些难以令人信服的结果。

5.1 贝叶斯纳什均衡的失效

这一节，我们探讨一个模型，这个模型借鉴自 [6] 的第 15.1 节。考虑王二想要进入一个由陈清扬垄断的市场，王二可以选择进入市场或者呆在外面。一旦王二选择进入市场，陈清扬则可以观测到王二已经进入，但是无法观测到王二的类型：竞争型还是菜鸡型。在王二选择进入后，陈清扬可以选择斗争或者接纳。陈清扬已知王二是竞争性的概率是 0.5。我们将这个博弈画出来。

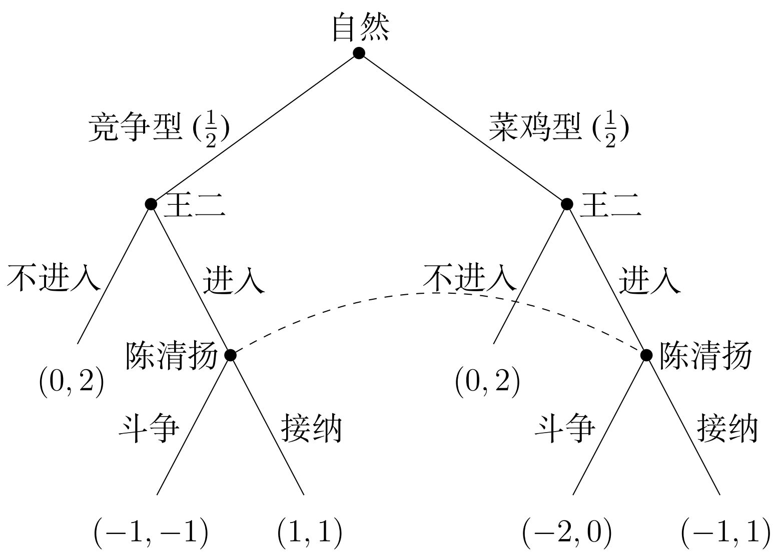

图 5.1: 王二进入市场

这个博弈的贝叶斯纳什均衡是什么？我们先将王二的战略理清楚，王二的战略有：{(不进; 不进), (不进; 进),(进; 不进),(进; 进)}，其中 (不进; 进) 表示：若王二是竞争型，则王二不进入市场；若王二是菜鸡型，则进入市场。陈清扬的战略有：{(若王二进入市场) 斗争，(若王二进入市场) 接纳}。我们将二者战略所对应的支付用下表画出来。

		陈清扬 斗争	陈清扬 接纳
王二	不进, 不进	$(0,2)$	$(0,2)$
王二	不进, 进	$(-1,1)$	$(-0.5,1.5)$
王二	进, 不进	$(-0.5,0.5)$	$(0.5,1.5)$
王二	进, 进	$(-1.5,-0.5)$	$(0,1)$

表 5.1: 谜一样的王二

笔记 [画表的方法] 怎么算出的表5.1中的支付？我们为大家举一个例子：以战略组合 ((不进, 进), 斗争) 为例。

- 此时竞争型王二不进入，获得 0 的支付；菜鸡型王二进入并被斗争，获得 -2 的支付。则此时王二的期望支付为：$0.5*0+0.5*-2=-1$;
- 此时陈清扬选择斗争一旦发现王二进入（不管其类型），当王二为竞争型时，陈清扬获得 2 的支付；当王二为菜鸡型时，王二选择进入，陈清扬选择斗争，则陈清扬的支付为 0，则陈清扬的期望支付为：$0.5*2+0.5*0=1$。

笔记 [为什么要在意王二的期望效用] 还记得我们在定义贝叶斯纳什均衡的时候，我们说具有私人信息的参与者最大化自己的期望支付, 其中期望支付源于对于对手的类型的不确定性, 但这里陈清扬并无私人信息，我们为什么要考虑王二的期望效用？原因在于，王二的期望效用可以写成：

$$p(\theta_{\text{王}})u(s_{\text{王}}(\theta_{\text{王}}),s_{\text{陈}};\theta_{\text{王}})$$

注意到给定陈清扬的战略，王二的不同战略 $s(\theta)$ 所导致的期望效用的权重是一样的，都是 $p(\theta_{\text{王}})$。因此，一旦王二的期望效用最大化时，每一个 $\theta_{\text{王}}$ 对应的战略必定是支付最大化的。

通过我们常用的划线法，我们发现这个博弈有两个贝叶斯纳什均衡：((不进，不进)，斗争) 和 ((进，不进)，接纳)。显然，第一个贝叶斯纳什均衡并不是合理的，因为一旦王二选择进入，陈清扬不可能选择斗争（不论王二是哪种类型）。如何避免这一点，和子博弈精炼纳什均衡一样，我们要求每一位参与者在自己的信息集上的行动是最优的。

5.2 完美贝叶斯纳什均衡

在上一节，我们讲到一个合理的预测应该使得每一位参与人在自己的信息集上是最优的，这句话只讲了一半。最优如何定义？我们在这里不得不引入信念（belief）这个概念，而每一位参与人在自己的信息集上最优，实际上就是在这个信息集上选择相对于自己的信念最优的行动。

定义 5.1 (信念)

所谓信念就是指：参与人在每一个信息集上要有一个自己的推断，即推断自己处于每一个决策结的概率是多少。

♣

一旦有了信念，最优的行动就可以确定了。比如，我们考虑以下这个例子，还是王二进入市场的博弈，但是我们修改了陈清扬斗争弱鸡型王二的支付。假设此时陈清扬的信念是：$Pr(\text{竞争型，进入}) = Pr(\text{菜鸡型，进入}) = 0.5$[1]

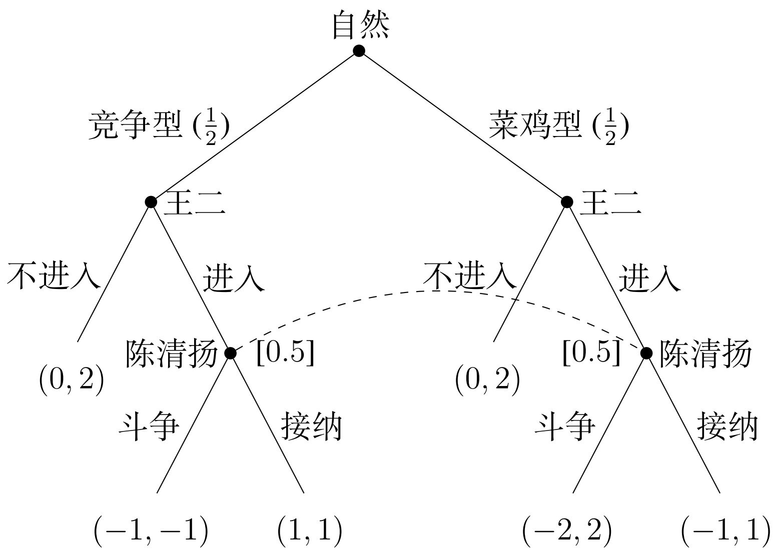

图 5.2: 根据信念确定最优行动

则陈清扬选择斗争和接纳的期望支付分别为：

- 斗争：$0.5 * -1 + 0.5 * 2 = 0.5$;
- 接纳：$0.5 * 1 + 0.5 * 1 = 1$;

因此，根据陈清扬的信念 $(0.5, 0.5)$，陈清扬在这个信息集上的最优行动为接纳。或许细心的朋友们已经注意到，我们并未告诉读者朋友们如何确定信念，我们下面就做这件事。注意到信念实际上取决于参与人的战略。有的战略会到达某一个信息集，但是有的战略到达不了，因此对于战略能够抵达的信息集，我们说信念是由战略和类型分布共同决定的；对于战略无法抵达的信息集，我们说任何信念都适用。下面，我们严谨地对这段文字下定义。

定义 5.2 (能到达的信息集 (On the equilibrium path))

我们说信息集在均衡路径上，当给定了所有参与人的战略组合和所有参与人的类型分布时，有大于零的概率会到达这个信息集。反之，一个信息集不在均衡路径上 (off the equilibrium path) 当到达这个信息集的概率为 0。 ♣

因此，就像这个概念的名字一样，一个信息集在均衡路径上意味着博弈有可能可以到达这个均衡路径，一个信息集不在均衡路径则是指根据所有参与人的战略和信念，博弈没有可能到达一个信息集。至此，我们已经有能力去定义完美贝叶斯纳什均衡了。

[1]在完全信息动态博弈那一章中，我们已经告诉读者朋友们，决策结实际上和此前的历史是等价的，因此我们可以用此前的历史来表达决策结。

定义 5.3 (完美贝叶斯纳什均衡)

完美贝叶斯纳什均衡是一组战略组合和信念。并且这一组战略组合和信念要满足以下四个条件：

1. 每一位参与人都要有一套信念，意思是：她要对自己所有信息集上的决策结有一个推断的概率分布；
2. 对于在均衡路径上的信息集，其信念应该与贝叶斯法则一致；
3. 对于不在均衡路径上的信息集，任何信念都可以；
4. 在每一个信息集上，参与人对于自己的信念要选择一个可以最大化期望支付的行动（best response）。

♣

5.3 信号博弈：王二是渣男吗？

信号博弈是一类非常诱人的不完全信息动态博弈，最早起源于诺奖得主迈克尔斯彭斯的博士论文，在他的博士论文中，他研究了劳动者如何通过高学历来传递自己高能力的信号，在这一小节中我们学习信号博弈。在这一节，我们考虑陈清扬和王二故事的大结局：王二终于给陈清扬表白了！但问题在于王二有可能是渣男，为了给陈清扬证明自己不是渣男，王二有两个选择：把手机密码告诉陈清扬，我们简记为“手机”；王二也可以给陈清扬做一个蛋糕。在观测到王二的行动以后，陈清扬可以选择“接受”或者“拒绝”。

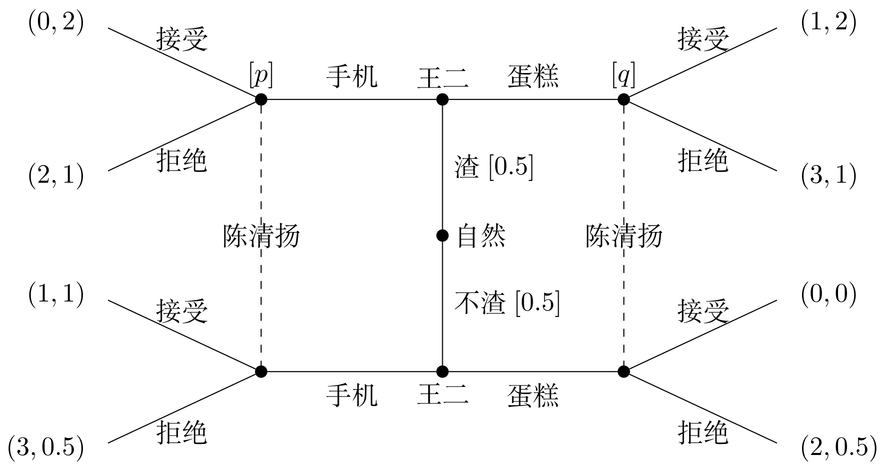

图 5.3: 王二表白记

为了解出这个博弈的完美贝叶斯纳什均衡，我们采用构造的方式。我们可以发现，王二一共有四种战略：(手机，手机)、(手机，蛋糕)、(蛋糕，手机)、(蛋糕，蛋糕)，其中（手机，蛋糕）表示：若王二是渣男，则王二选择给陈清扬看手机，若王二不是渣男，则王二选择给陈清扬做一个蛋糕。我们根据王二的战略分别来构造对应的完美贝叶斯纳什均衡，首先回忆这个信号博弈的完美贝叶斯纳什均衡的结构：

$$< s_{王}(\theta_{王}); s_{陈}(\theta_{陈}); p; q >$$

- (手机，手机)：当陈清扬观测到手机时，陈清扬并不确定王二的类型——她只知道王二有一半的概率是渣男，有一半的概率不是（因为无论哪个类型的王二都选择的是手机，因此先验概率等于后验概率）。因此，在手机引导的信息集上，陈清扬的最优反应是选择接受，因为接受带来的期望支付为 1.5，拒绝带来的期望支付是 0.75。到目前为止，我们虽然没有求出完美贝叶斯纳什均衡，但是我们可以下结论：（手机，手机）这样的均衡不可能存在。原因在于渣男类型的王二不可能选择手机，因为只要他选择“蛋糕”最少的支付也是 1，但在（手机，手机）这个战略下，陈清扬会接受，因此他只获得 0 的支付，他必定会偏离（手机，手机）这个均衡，而去选择蛋糕；
- (手机，蛋糕)：这个战略的意思是渣男王二选择手机，好男人王二选择蛋糕。因此，在这个战略下，一旦陈清扬观察到手机，她就知道这是渣男，从而会选择接受；一旦观察到蛋糕，她就知道王二是好人，从而会选择拒绝。因此，目前的战略组合为：(手机，蛋糕)；(接受，拒绝)。但是注意到，给定陈清扬的战略（接受，拒绝)，渣男王二不会选择手机，而是会选择蛋糕，因为选择手机陈清扬接受，他的支付为 0，但是选择蛋糕陈清扬会拒绝，他的支付为 3，因此（手机，蛋糕）这样的完美贝叶斯纳什均衡也不存在；
- (蛋糕，手机)：一旦陈清扬观测到蛋糕，她就知道这是渣男王二，因此她会选择接受；一旦陈清扬观察到手机，她就知道这是好男人王二，因此她会选择接受。目前，我们得到的战略组合为：(蛋糕，手机)；(接受，接受)。并且渣男（好男人）不会背离到选择手机（蛋糕)，因此我们说这个完美贝叶斯纳什均衡为：(蛋糕，手机)；(接受，接受)；$p = 0, q = 1$；
- (蛋糕，蛋糕)：陈清扬如果观察到蛋糕，会认为 $q = 0.5$，从而会选择接受。但注意到，好男人王二选择蛋糕的支付是 0，因为陈清扬面临蛋糕会选择接受。因此，好男人王二一定会选择手机，这样至少可以获得 1 的支付。

参考文献

[1] J. McKenzie Alexander. “Evolutionary Game Theory”. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Summer 2021. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021.

[2] Tilman Börgers. *An introduction to the theory of mechanism design*. Oxford University Press, USA, 2015.

[3] Vijay Krishna. *Auction theory*. Academic press, 2009.

[4] Andreu Mas-Colell, Michael Dennis Whinston, Jerry R Green, et al. *Microeconomic theory*. Vol. 1. Oxford university press New York, 1995.

[5] Matthew Rabin. “Incorporating Fairness into Game Theory and Economics”. In: *The American Economic Review* 83.5 (1993), pp. 1281–1302. ISSN: 00028282. URL: http://www.jstor.org/stable/2117561 (visited on 06/18/2023).

[6] Steven Tadelis. *Game theory: an introduction*. Princeton university press, 2013.

[7] Jean Tirole and Drew Fudenberg. *Game Theory*. MIT press, 1991.

[8] 张维迎. 博弈论与信息经济学. 上海人民出版社和上海三联出版社, 1996.

[9] 李光久，李昕. 博弈论简明教程. 江苏大学出版社, 2013.